

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Civil

Alexandre M. Arnold dos Santos

**APLICAÇÕES DE MÉTODOS DA ANÁLISE LIMITE
PARA CONCRETO ESTRUTURAL**

Porto Alegre
Janeiro de 2020

Alexandre M. Arnold dos Santos

APLICAÇÕES DE MÉTODOS DA ANÁLISE LIMITE PARA CONCRETO ESTRUTURAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Comissão de Graduação do Curso de Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Civil

Orientador: Samir Maghous

**Porto Alegre
Janeiro de 2020**

CIP - Catalogação na Publicação

Santos, Alexandre Matheus Arnold dos
APLICAÇÕES DE MÉTODOS DA ANÁLISE LIMITE PARA
CONCRETO ESTRUTURAL / Alexandre Matheus Arnold dos
Santos. -- 2020.
39 f.
Orientador: Samir Maghous.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de
Engenharia, Curso de Engenharia Civil, Porto Alegre,
BR-RS, 2020.

1. Análise Limite. 2. Concreto Estrutural. 3.
Capacidade Portante. 4. Dimensionamento de Estruturas.
I. Maghous, Samir, orient. II. Título.

Alexandre M. Arnold dos Santos

APLICAÇÕES DE MÉTODOS DA ANÁLISE LIMITE PARA CONCRETO ESTRUTURAL

Este Trabalho de Diplomação foi julgado adequado como pré-requisito para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL e aprovado em sua forma final pela Banca Examinadora, pelo Professor Orientador e pela Comissão de Graduação do Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, janeiro de 2020.

Prof. Samir Maghous

Dr. pela École Nationale des Ponts et Chaussées, ENPC, França
Orientador

Banca examinadora

Prof. Samir Maghous (UFRGS)

Dr. pela École Nationale des Ponts et Chaussées, ENPC, França.

Profa. Vanessa Fátima Pasa Dutra (UFRGS)

Dra. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS, Brasil.

Prof. Jorge Luis Palomino Tamayo (UFRGS)

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS, Brasil.

*Ao meu avô,
a todos os trabalhadores braçais.*

AGRADECIMENTOS

Ao sr. professor Samir Maghous da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, expresso imensa gratidão por sua paciência e solicitude para esclarecimentos de conceitos complexos, ao mesmo tempo incentivando a clareza de raciocínio e o rigor, que serão influência permanente na minha formação.

Agradeço à sra. professora Vanessa Fátima Pasa Dutra e ao sr. professor Jorge Luis Palomino Tamayo por aceitarem analisar este trabalho e compor a banca examinadora.

Agradeço ao sr. professor Eduardo Luis Isatto que forneceu o template abntex2 para \LaTeX adaptado ao formato da UFRGS, o que facilitou tremendamente a formatação deste trabalho.

Agradeço ao sr. engenheiro Paulo Stumm, por ajudar-me a desmistificar o conhecimento adquirido na universidade, apontando o caminho para a prática profissional da engenharia.

RESUMO

A análise limite fornece bases teóricas sobre as quais os problemas relacionados à resistência última de estruturas de comportamento dúctil podem ser formulados e estudados. A teoria permite uma compreensão unificada do comportamento de classes distintas de elementos estruturais na ruptura, o que é valioso em particular para o dimensionamento e verificação de elementos de concreto armado. Por essa razão, ao longo do curso da história do concreto armado, diversos procedimentos de cálculo foram criados que são relacionados à teoria da análise limite em algum grau. Alguns partem da teoria com hipóteses simplificadoras para obter procedimentos de projeto simples o bastante para aplicações práticas, outros foram criados a partir da intuição e observação de experimentos, e alguns são aplicações verdadeiras das abordagens estática ou cinemática da análise limite. Estes procedimentos revelam-se valiosas ferramentas para o projeto e concepção de estruturas. Além disso, muitos aspectos da análise limite estão incorporados em normas para o dimensionamento de estruturas de concreto armado na forma de instruções ou expressões para o dimensionamento de armaduras e verificações de tensão. Estas expressões são amplamente empregadas, mas na maior parte das vezes o engenheiro ou estudante não está ciente de suas origens, limitações e da possibilidade de estendê-las e combiná-las com outros procedimentos. Os métodos associados à abordagem estática da análise limite resultam em um limite inferior para a carga última, e permitem considerações racionais dos modos internos de transferência de cargas das estruturas. São úteis para o dimensionamento e verificação de elementos com geometrias incomuns, e auxiliam na tomada de decisões sobre a definição de proporções geométricas e no dimensionamento e detalhamento da armadura de estruturas novas. Os métodos associados à abordagem cinemática permitem a análise de possíveis modos de ruptura, resultando em um limite superior para a capacidade de carga de elementos, útil para verificações mas que podem frequentemente ser empregados também para o dimensionamento. Para a aplicação destes métodos a estruturas de concreto armado, o comportamento dúctil deve ser garantido. Ductilidade em estruturas de concreto armado depende do controle dos estados de tensão e distribuições de tensões de regiões dos elementos através do arranjo das armaduras e detalhamento das zonas de ancoragem. Este trabalho tem como objetivo expor as semelhanças que estes métodos de cálculo aplicados ao concreto estrutural têm entre si por meio de suas ligações com os teoremas e conceitos da análise limite, e investigar condições que devem ser observadas para o concreto armado em particular, para aplicações práticas.

Palavras-chave: Análise Limite. Concreto Armado. Capacidade de Carga.
Dimensionamento de Elementos Estruturais.

ABSTRACT

Limit analysis provides the theoretical basis upon which the problems regarding the ultimate strength of structures with ductile behavior can be formulated and studied. It enables an unified understanding of the behavior of different classes of structural elements at ultimate strength, which is valuable in particular for the design and assessment of reinforced concrete elements. For this reason, along the course of the history of reinforced concrete, many calculation procedures were created which are related to theory of limit analysis to some degree. Some depart from the theory with simplifying assumptions to get design procedures simple enough for practical applications, others were crafted from intuition and observation of experiments, and a few are true applications of the static or kinematic approaches. Those procedures have shown to be valuable tools for the design and conception of structures. Besides, many aspects of limit analysis are incorporated in modern codes of practice for the design of reinforced concrete structures as instructions or expressions for dimensioning of reinforcement and stress checks. Those expressions are largely employed, but most of the time the engineer or student is not aware of its origins, limitations and the possibility of extending and combining them with other procedures. The methods associated to the static approach of limit analysis result in a lower bound for the ultimate load, and enable rational considerations of the internal modes of load transfer of structures. They are useful for design and assessment of elements with unusual geometries, and assist the decision making on geometrical proportioning and the dimensioning and detailing of rebar for new structures. The methods associated to the kinematical approach let the possible modes of failure to be considered, yielding an upper bound solution for the ultimate load of elements, useful for assessment but which can often be also used for design. For an application of these methods to reinforced concrete structures, a ductile behavior for the concrete must be ensured. Ductility in reinforced concrete structures depends on the control of the stress states and stress distributions of the regions of structural elements by means of rebar arrangement and the detailing of anchorage regions. The aim of this work is to expose the similarities that these calculation procedures for applications to structural concrete have between each other through their links to the theorems and concepts of limit analysis, and to investigate the conditions which must be met by reinforced concrete in particular for practical applications.

Keywords: Limit Analysis. Reinforced Concrete. Load Bearing Capacity.
Design of Structural Elements.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ACI	American Concrete Institute
CEB	Comité Euro-International du Béton
ELS	Estado Limite de Serviço - Formação de Fissuras
ELU	Estado Limite Último
FIB	Fédération Internationale du Béton
FIP	Fédération Internationale du Précontrainte
MBT	Modelo de Bielas e Tirantes
NBR	Norma Brasileira
SIA	Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	CÁLCULO E DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO	17
1.2	DUCTILIDADE E INDETERMINAÇÃO ESTATICA PARA ROBUSTEZ EM ESTRUTURAS	18
1.3	O COMPORTAMENTO PLÁSTICO DAS ESTRUTURAS . .	21
1.4	FUNDAMENTOS BÁSICOS DA TEORIA DA ANÁLISE LIMITE	26
1.4.1	Critério de resistência do material	26
1.4.2	Descrição da geometria e carregamento	28
1.4.3	O teorema das potências virtuais	30
1.4.4	Abordagem estática e carregamento suportável	31
1.4.5	A abordagem cinemática e o teorema cinemático	32
1.5	CONTEXTUALIZAÇÃO E OBJETIVO DO TRABALHO . .	33
2	MÉTODOS TRADICIONAIS ASSOCIADOS À ABORDAGEM ESTATICA DA ANÁLISE LIMITE	35
2.1	INTRODUÇÃO	35
2.2	MÉTODOS DO TIPO ESTATICO NO CÁLCULO DE VIGAS	36
2.2.1	Análise plástica e redistribuição momentos	36
2.2.2	Breve histórico do desenvolvimento de métodos do tipo estático para o dimensionamento de vigas sob esforço cortante	38
2.2.3	A relação entre as expressões usuais para dimensionamento ao esforço cortante e a análise limite	40
2.3	MODELOS DE BIELAS E TIRANTES E CAMPOS DE TENSÕES PARA O DIMENSIONAMENTO DE ELEMENTOS ESPECIAIS	44
2.3.1	Modelos de campos de tensões descontínuos	48
2.3.2	Crítica da abordagem de dimensionamento com modelos de campos de tensões descontínuos; limitações	52
2.3.3	Interação de campos de compressão com opções de ancoragem	54
2.4	MÉTODOS DO TIPO ESTATICO E CRITÉRIO PARA O DIMENSIONAMENTO DE LAJES	54
2.4.1	Método das tiras simples (simple strip method)	56

2.5	EXEMPLO DE APLICAÇÃO: ELEMENTO EM ÂNGULO SOB FLEXÃO PURA	61
3	MÉTODOS TRADICIONAIS ASSOCIADOS À ABORDAGEM CINEMÁTICA DA ANÁLISE LIMITE	65
3.1	INTRODUÇÃO	65
3.2	CÁLCULO DA CAPACIDADE OU RESISTÊNCIA DE LA- JES ATRAVÉS DA ABORDAGEM CINEMÁTICA	68
4	CONCLUSÕES	75
	REFERÊNCIAS	77

1 INTRODUÇÃO

Resumo: Este capítulo introduz a problemática do cálculo e dimensionamento de estruturas de concreto armado e trata das características a observar para a concepção de elementos estruturais robustos. A teoria da análise limite é contextualizada, assim como os elementos teóricos necessários para a fundamentação dos métodos de cálculo apresentados nos capítulos seguintes.

1.1 CÁLCULO E DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

O dimensionamento de estruturas de concreto armado inicia, geralmente, pela escolha da geometria dos elementos estruturais, a fim de proporcionar rigidez (altura de vigas, inércia) adequada para controle de deflexões em serviço, seguido pelo dimensionamento das armaduras para resistência da estrutura à ruptura. O projetista tem certa liberdade em escolher o modo de sustentação de cargas, pela escolha do arranjo e dimensionamento das armaduras. Em uma laje, por exemplo, pode-se escolher uma direção predominante para distribuição de cargas, privilegiando a taxa de armadura em uma direção.

No cálculo de vigas, pilares e lajes em aplicações e de dimensões usuais, o detalhamento das armaduras é imediato, as formulações para seu dimensionamento são encontradas em normas e livros técnicos. Na prática, entretanto, é impossível enquadrar todos os casos a esses tipos básicos. É comum incorrer em casos onde o trabalho de detalhamento das armaduras é complicado, pois a forma de atuação dos esforços resistentes internos torna-se complexa devido à geometria dos elementos ou pela configuração do carregamento. Não é trivial, por exemplo, como proceder com o detalhamento das armaduras para todas as regiões da estrutura ilustrada na Figura 1.

Figura 1 – Ponte no desfiladeiro de Versam, Suíça



(fonte: Kaufmann e Meier (2015))

Portanto, torna-se necessário dispor de métodos de cálculo que permitam avaliar opções de detalhamento para situações complexas. Como as normas e livros técnicos não abrangem todas as situações de dimensionamento possíveis (e tampouco têm essa pretensão), a falta de conhecimento de métodos de cálculo gerais, baseados em princípios básicos, impede a criação de soluções estruturais inovadoras e com expressão estética. Conforme observa Chen (1975, p.15) no contexto do cálculo de fundações:

“(...) frequentemente o engenheiro emprega textos bem conhecidos (...), ou a literatura técnica mais recente como um manual mágico e tenta encaixar seu problema às soluções particulares que ele encontra. Intuição e inovação parecem desencorajadas por desconhecimento e complexidade aparente”.

Há dificuldade em estabelecer uma formulação geral para o dimensionamento de estruturas de concreto armado, devido à heterogeneidade do material e à complexa redistribuição de esforços sob carregamento. Ao longo da história do concreto armado, os desafios impostos pelo seu comportamento complexo motivaram a criação de modelos mecânicos para explicar os mecanismos internos de sustentação de cargas, inspirados pela observação de elementos em experimentos de carregamento até a ruptura. É a origem do modelo da treliça de Ritter-Mörsch (Ritter (1899), Mörsch (1910)), por exemplo, que mais tarde foi generalizado para o modelo de bielas e tirantes. A observação de padrões de ruptura também estimulou a criação de métodos de cálculo na ruptura para lajes e vigas, baseados em mecanismos de colapso. Em paralelo, a teoria da plasticidade e a teoria da análise limite foram desenvolvidas, trazendo bases teóricas consistentes a estes modelos mecânicos.

Os métodos de cálculo associados à análise limite podem ser divididos entre dois tipos: estáticos ou cinemáticos. Os métodos do tipo estático resultam em um limite inferior para a carga de colapso, fornecendo um valor seguro para a carga última para o dimensionamento. Os métodos do tipo cinemático baseiam-se em mecanismos de colapso, e fornecem um limite superior para a carga de colapso, isto é, um valor que certamente é capaz de levar a estrutura ao colapso.

A aplicabilidade dos métodos baseados na análise limite depende da observação de regras de detalhamento como taxas mínimas e máximas de armadura e detalhes de ancoragem, que garantem ductilidade ao concreto armado, conferindo a capacidade de redistribuição dos esforços internos necessária para um comportamento estrutural robusto.

1.2 DUCTILIDADE E INDETERMINAÇÃO ESTÁTICA PARA ROBUSTEZ EM ESTRUTURAS

A concepção de uma estrutura tem como objetivo principal a garantia da segurança aos seus ocupantes. No projeto, o carregamento máximo que a estrutura deve resistir é quantificado a partir do uso previsto para a estrutura. O carregamento máximo, que teoricamente poderia levar

a estrutura ao colapso, é denominado *carregamento último* ou *carga de ruptura* q_u . Para garantir que exista uma margem suficiente de segurança contra este *estado limite último de ruptura* (ELU) da estrutura, as ações F são majoradas, e as resistências dos materiais f minoradas, por coeficientes de origem estatística. A partir dos efeitos das combinações de ações majoradas, calcula-se as *solicitações de projeto* S_d , e das resistências minoradas dos materiais, calcula-se os *esforços resistentes de projeto* R_d . A comprovação analítica da segurança é feita pela verificação da desigualdade

$$R_d \geq S_d.$$

Esse é o procedimento essencial a adotar para garantir a resistência de uma estrutura, segundo a prática estrutural corrente.

A verificação da segurança no ELU é básica, garantindo a *resistência* da estrutura para os efeitos das ações previsíveis. De forma análoga, a verificação do comportamento sob estados limites de serviço (ELS) garante a *rigidez elástica*. No entanto, como R_d e S_d são baseados em probabilidades, admite-se que esses valores têm sua previsão sujeita a erros. A realidade mostra que podem ocorrer ações imprevisíveis de grande magnitude ($S > S_d$), ou a resistência dos elementos pode ficar comprometida por efeitos também imprevisíveis ($R < R_d$).

Caso ocorra uma situação em que ações imprevisíveis causem solicitações que vençam a resistência da estrutura ($S > R$), ocorrerá o colapso de elementos. As verificações de resistência e rigidez não bastam para garantir que a estrutura se comportará de maneira a proteger seus ocupantes da melhor forma possível e minimizar danos econômicos sob um eventual colapso. Portanto, no projeto de uma estrutura é apropriado considerar a *robustez*. “Robustez é a propriedade de sistemas que os capacitam a sobreviver a circunstâncias incomuns ou imprevisíveis” (KNOLL et al., 2009, p.1). Em um sistema estrutural, robustez é o grau de tolerância a danos. A busca por robustez lida com a consideração dos possíveis modos de ruptura da estrutura sob ações imprevisíveis, e o controle de seus efeitos.

Uma estrutura pode ser considerada robusta se possuir as seguintes características:

- não tem grande sensibilidade a impactos, explosões, sobrecargas maiores do que as previstas, falhas nas fundações;
- o colapso de um elemento não acontece de forma brusca e não causa colapso progressivo no restante do sistema estrutural;
- o sistema consegue sobreviver adequadamente à remoção ou perda de resistência de um elemento ou certa porção da estrutura.

Assim, admitindo a possibilidade de danos à estrutura, procura-se uma forma de tornar o colapso eventual o menos catastrófico quanto possível. O tipo de dano a considerar depende de cada estrutura e de seu ambiente. Em um hangar, por exemplo, pode ser a perda de uma coluna sujeita

ao choque de veículos. Para uma ponte, pode ser a perda da resistência de alguns elementos por más condições de conservação. No entanto, qual a melhor maneira de projetar a estrutura de forma que os efeitos dos danos aos elementos possam ser controlados para evitar um colapso catastrófico da estrutura? Segundo Knoll et al. (2009, p.13),

“[...] a robustez estrutural do sistema estrutural, em um sentido geral, deve ser procurada projetando com uma topologia, geometria, propriedades de materiais, dimensões ou elementos auxiliares, etc., de forma que a estrutura sobreviverá à perda ou redução da resistência de qualquer um, ou vários, dos seus elementos.”

Seja qual for a estratégia adotada, a busca por um comportamento robusto é auxiliada visando *indeterminação estática e ductilidade*. A ductilidade permite aos elementos do sistema estrutural que deformem significativamente além do patamar elástico sem ruptura brusca. Indeterminação estática ou hiperstaticidade permite a existência de diversos modos de transferência de cargas. Combinando hiperstaticidade e ductilidade garante-se que, caso ocorra a falha de um elemento ou parte da estrutura, ocorrerá redistribuição gradual de solicitações, e outras partes continuarão sustentando as cargas, evitando colapsos bruscos e progressivos.

Åkesson (2008, p.243), no relato sobre o colapso parcial de uma ponte suspensa em arco em 2003 no Canadá, causado pela ruptura por fadiga de cabos de sustentação (Figura 2), observa que

“a ponte aguentou a fratura de dois tirantes sem colapso total, mostrando assim um alto grau de redundância estrutural, que é uma característica muito importante e necessária de uma ponte – é absolutamente vital que uma ponte receba um projeto tal que, se possível, responda de maneira robusta a danos.”

Figura 2 – Colapso parcial da ponte *Sgt. Aubrey Cosens VC Memorial*, Canadá



(fonte: Choudhury e Hasnat (2015))

Figura 3 – Equipe de resgate na ponte Nanfang'ao colapsada, Taiwan



(fonte: www.npr.org/2019/10/01/766001191 Acesso em: 22 nov 2019)

Nesse episódio, após a ruptura de um terceiro tirante durante a passagem de um caminhão, ocorreu o colapso parcial, mas o tabuleiro de concreto suportou grandes deformações sem colapsar (ductilidade), permitindo ao motorista que transitava sobre a ponte no momento da ruptura terminar a passagem a salvo. A ponte Nanfang'ao (Figura 3), que colapsou em outubro de

2019 em Taiwan, possuía um sistema estrutural aparentemente semelhante ao da ponte canadense, porém a ruptura foi brusca e catastrófica.

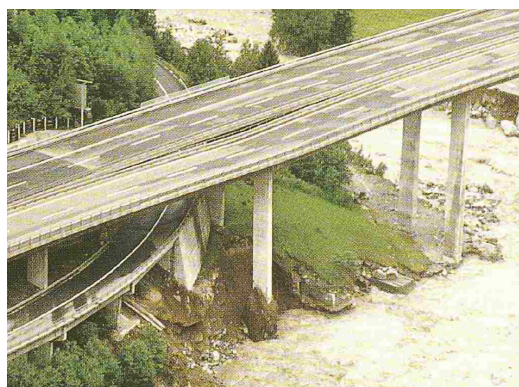
A ponte sobre o rio Reuss em Wassen, Suíça, é um exemplo real de como a robustez estrutural em uma estrutura de concreto armado pode minimizar danos em uma situação imprevisível. Em 1987 grandes enchentes causaram o afundamento da fundação de um de seus pilares em 120 cm (Figura 4 e Figura 5). A superestrutura foi capaz de suportar grandes deformações, evitando o colapso do trecho, que pôde ser reparado posteriormente (MENN, 1989). A robustez nesse caso foi proporcionada pela continuidade da superestrutura e pelo comportamento dúctil do concreto armado.

Figura 4 – Ponte sobre o rio Reuss: vista do tabuleiro deformado



(fonte: Menn (1989))

Figura 5 – Dano causado pelo solapamento da fundação do pilar



(fonte: Huber (1989))

O cálculo da carga última de uma estrutura q_u , assim como o estudo das propriedades do colapso plástico, constituem o objetivo principal da Teoria da Análise Limite. A abordagem estática da teoria considera a forma como os esforços resistentes equilibram a carga no estado de colapso, fornecendo um limite inferior para q_u . A abordagem cinemática lida com os mecanismos de colapso da estrutura, fornecendo um limite superior para q_u . Dessa forma, além de possibilitar a quantificação da carga de colapso, a aplicação da teoria resulta em informações qualitativas sobre o estado de colapso (equilíbrio e mecanismos de ruína). Portanto, a análise limite e os métodos baseados em raciocínios similares são ferramentas valiosas para o projeto estrutural orientado à robustez.

1.3 O COMPORTAMENTO PLÁSTICO DAS ESTRUTURAS

A história da teoria das estruturas revela que o estudo das estruturas permaneceu quase exclusivamente dedicado ao desenvolvimento de processos baseados na teoria da elasticidade até o início do século XX (ver (TIMOSHENKO, 1983) e (KURRER, 2008)). Heyman (1999) aponta que o objetivo básico da teoria das estruturas foi calcular tensões elásticas e dimensionar elementos de acordo com a seção de sollicitação máxima, desde 1826, ano da publicação das *Leçons* de Navier, a obra que mostrava pela primeira vez como calcular tensões elásticas de

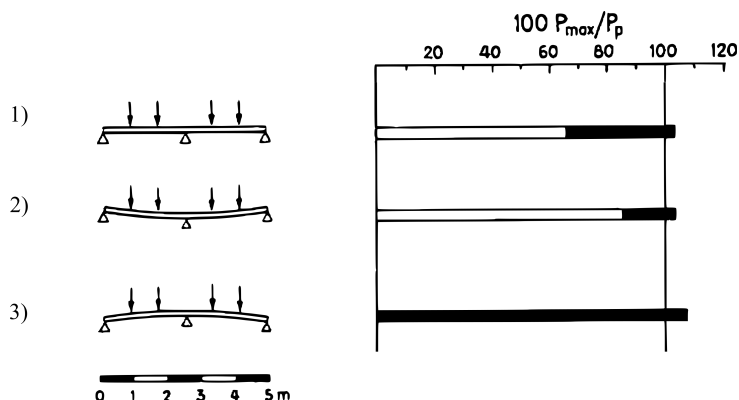
estruturas hiperestáticas de forma “exata”. Somente cerca de uma década depois tornou-se evidente que é impossível calcular as tensões reais, i.e. obtidas pela medições das deformações na estrutura, de maneira exata.

As primeiras medições de tensões em estruturas de edifícios reais foram levadas a cabo em 1936 pelo *Steel Structures Research Committee* do Reino Unido em estruturas de aço que estavam então sendo erguidas para edifícios comerciais e residenciais (HEYMAN, 1998, p.136). As medições revelaram que as tensões reais em serviço eram muito diferentes daquelas calculadas pelos projetistas através de métodos de cálculo elásticos. A razão para isso é que pequenas imprecisões de montagem ou defeitos de fabricação das peças de aço interferem na distribuição das tensões elásticas da estrutura. Também para estruturas de concreto armado, é impossível prever o estado real de tensões, pois o material está sujeito a fissuração e efeitos dependentes do tempo como retração e fluência, todos dependentes da história de carregamento da estrutura.

Na mesma época começaram a ser realizados numerosos experimentos de carregamento até a ruptura com estruturas de aço e de concreto armado. No Brasil, o estudo do comportamento plástico do concreto armado teve contribuições através de experimentos e estudos teóricos realizados pelo professor Lobo Carneiro no Instituto Nacional de Tecnologia (INT) na década de 60.

Os experimentos em vigas contínuas e pórticos (Figuras 6 e 7) revelaram que, mesmo com a presença de imperfeições iniciais, uma estrutura capaz de formar “rótulas plásticas” apresenta sempre o mesmo valor, aproximadamente, para a carga de colapso, para um dado modo de carregamento. Na Figura 6, as barras do gráfico representam a carga de início da deformação plástica em preto, e comparam a carga de colapso medida P_{max} com previsão da teoria plástica P_p . A terceira viga teve o apoio intermediário propositadamente deslocado até a deformação

Figura 6 – Comparação entre o valor teórico P_p e valor experimental P_{max} da capacidade de carga total, para uma viga I de aço sobre 3 apoios: 1) viga inicialmente não-perturbada; 2) apoio intermediário com deslocamento inicial para baixo; 3) apoio intermediário erguido até o início da plastificação



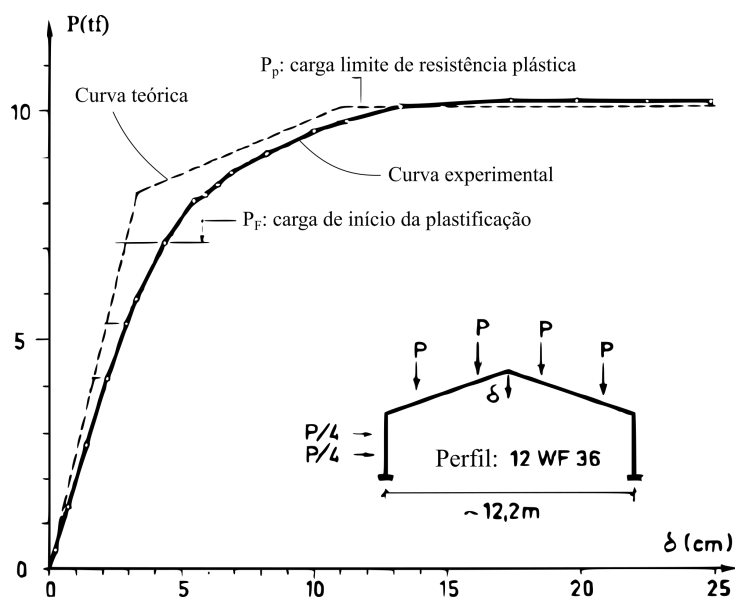
(fonte: adaptado de Thürlimann (1961))

permanente da seção por plastificação antes da aplicação do carregamento, e ainda assim atingiu a capacidade de carga P_p calculada para a estrutura indeformada, mostrando a insensibilidade

da carga de colapso a imperfeições iniciais. Tornou-se evidente que em muitos casos não fazia sentido definir a carga última da estrutura com base na primeira plastificação da estrutura.

Este fato corrobora com a relevância do raciocínio da análise limite para a formulação do conceito de carga última. De fato, a carga de ruptura prevista pelas ferramentas da análise limite não depende do estado inicial da estrutura.

Figura 7 – Resultado experimental de carregamento até o colapso em um pórtico de aço



(fonte: adaptado de Thürlimann (1961))

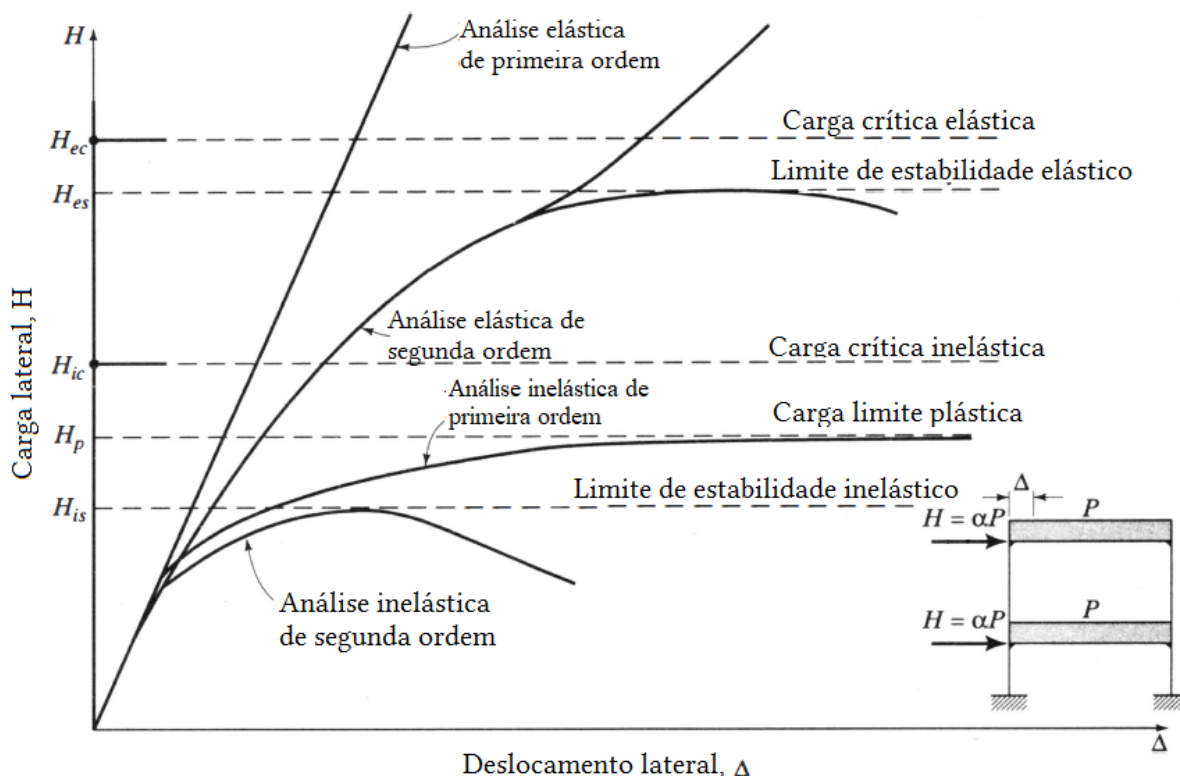
Esse período (de 1936 a meados da década de 1960) marcou o surgimento e desenvolvimento dos métodos de cálculo plástico de vigas contínuas e pórticos de aço. O fato de que o carregamento último podia ser definido como o carregamento que "quando gradualmente aumentado, causa rápido aumento de deflexão" (KAZINCZKY, 1936, p.57) representa uma mudança de paradigma. No caso do pórtico da Figura 7, o carregamento último está indicado por P_p . Quanto maior o grau de indeterminação estática e a capacidade de deformação plástica de uma estrutura, maior é a diferença entre a carga correspondente à primeira plastificação (início da deformação permanente) e a carga de colapso plástico. Portanto dois pórticos com sistemas estruturais diferentes que sejam projetados com base na primeira plastificação (máxima tensão elástica calculada igual à tensão de escoamento f_y) terão coeficientes de segurança ao colapso diferentes.

Hoje, a análise plástica simples é endossada pelas normas de cálculo de estruturas, mas parece ser raramente empregada na prática estrutural, em parte devido à influência dos programas de computador baseados predominantemente na implementação do método dos deslocamentos para solução do problema elástico. De fato, realizar uma análise plástica é inviável para a maioria das situações de projeto, porque exigiria uma análise à parte para o ELU, além da sempre necessária análise elástica realizada para verificações nos ELS. O trecho extraído do livro do engenheiro Christian Menn (1990, p.97), projetista da ponte da Figura 4 e consultor do reparo da mesma, reforça a necessidade de uma aplicação consciente da solução elástica:

“em casos normais da prática estrutural, o projeto no estado limite último é baseado na solução (análise) elástica, sendo que a carga de ruptura, definida como a máxima carga que satisfaz as condições de contorno, equilíbrio externo e equilíbrio interno [a carga de colapso plástico] é calculada somente quando uma verificação adicional de resistência é necessária [...]. No entanto, não é razoável apegar-se cegamente à teoria elástica e à solução elástica “exata”, sendo desprezíveis os efeitos da precisão adicional sobre a segurança e a economia. Distribuições simplificadas do carregamento, por exemplo, podem reduzir o esforço de cálculo consideravelmente, sem perdas significativas de precisão. Além disso, a solução elástica exata é inadequada quando ocorre redistribuição significativa de esforços de seção no estado limite último”

Uma estrutura hiperestática só atingirá a carga última, no entanto, se apresentar colapso plástico, e para isso seus elementos devem ser capazes de plastificar sem que ocorra instabilidade elástica. Estruturas reais estão sujeitas a não-linearidades relacionadas ao material ou à geometria da estrutura. Conforme a seção dos elementos, geometria da estrutura e tipo de carregamento, podem haver diferentes tipos de resposta sob carregamento crescente. A escolha do tipo de análise consiste em “escolher o método que foge ao ideal de uma forma ou de outra, mas que fornece uma simulação analítica adequada para o caso em questão” (MCGUIRE et al., 2000, p.218). A Figura 8 ilustra diferentes tipos de resposta possíveis para um pórtico hipotético sob diferentes níveis de intensidade do carregamento lateral H , e os tipos de análise que permitem a modelagem dessas respostas.

Figura 8 – Níveis de análise



(fonte: adaptado de McGuire et al. (2000))

A *análise elástica de primeira ordem* exclui qualquer tipo de não-linearidade, e é adequada para simular o comportamento em serviço das estruturas. A maior parte dos programas de cálculo comerciais baseia-se nesse tipo de análise e faz uso de métodos aproximados para obter esforços de segunda ordem ligados à não-linearidade geométrica e física.

A *carga crítica elástica* é a carga sob a qual é possível ocorrer flambagem das colunas (teoria de Euler), determinada por um problema de autovalores, e a *carga crítica inelástica* é o estado de instabilidade em que ocorre interação com um comportamento inelástico do material.

A *análise elástica de segunda ordem* leva em conta os efeitos da mudança de geometria sobre os efeitos das cargas (efeito $P - \Delta$), mas considera o material constituinte como elástico. Este tipo de análise é adequado para edifícios com deformação lateral significativa (deslocáveis), e requer a solução incremental de equações não-lineares. Nas normas para estruturas encontram-se diversos métodos aproximados para levar-se em conta os efeitos de segunda ordem utilizando os resultados da análise de 1ª ordem, evitando o inconveniente da solução numérica das equações não-lineares.

Na *análise inelástica de segunda ordem*, leva-se em conta não-linearidades física e geométricas. Esta é a análise mais completa, ou mais capaz de modelar o comportamento real, teoricamente. Na prática, como reconhece J HEYMAN (1996, p.164), "as condições de contorno são, em geral, desconhecidas e inconhecíveis". Todos os tipos de análise assumem condições de contorno idealizadas – tal como uma base perfeitamente plana – que na prática são essencialmente impossíveis de se antever, portanto uma análise inelástica de segunda ordem em pórticos dificilmente seria justificável em situações práticas usuais.

A *análise inelástica de primeira ordem* leva em conta o comportamento inelástico do material, mas o equilíbrio é expresso sobre a geometria indeformada. A análise limite enquadra-se nesse caso, porém o cálculo dos deslocamentos e da evolução elasto-plástica da estrutura estão fora do seu escopo, o objetivo da análise limite é determinar diretamente a *carga limite plástica* q_u da estrutura a partir de um critério de resistência para o material e da hipótese de comportamento plástico. De fato, pode-se provar que o valor da carga q_u resultante é indiferente quanto a escolha entre as hipóteses de comportamento rígido-plástico e elasto-plástico (PRAGER, 1959), portanto se o único objetivo da análise inelástica é conhecer o valor da carga limite, não há nenhuma necessidade em conhecer a evolução do comportamento prévio à ruptura.

Assim, a análise limite só poderá ser aplicada para determinar a carga de ruptura de uma estrutura quando for possível garantir que esta

- não esteja sujeita à perda de estabilidade por flambagem;
- apresenta comportamento plástico no colapso, i.e. permite a formação de mecanismos de colapso¹;

¹ Mesmo em estruturas de alvenaria o arranjo geométrico pode permitir, como é o caso dos arcos, que as seções

- não sofre grandes mudanças de geometria do início do carregamento até a ruptura (efeitos de segunda ordem não são importantes).

Este trabalho lidará somente com problemas e métodos de cálculo que assumem a validade dessas condições, portanto a carga limite plástica será denominada simplesmente de *carga de ruptura* q_u .

1.4 FUNDAMENTOS BÁSICOS DA TEORIA DA ANÁLISE LIMITE

Nesta seção são apresentados elementos da teoria da análise limite para a fundamentação dos métodos apresentados no trabalho. Uma apresentação rigorosa da teoria da análise limite e do cálculo à ruptura no contexto da mecânica do contínuo pode ser encontrada em (SALENÇON, 2013). Abordagens da teoria da análise limite orientadas a aplicações no cálculo do concreto armado podem ser conferidas em (NIELSEN; HOANG, 2011) e (MARTI et al., 1999). Chen (1975) apresenta a teoria orientada a aplicações em geotecnia.

A Análise Limite tem o objetivo de determinar os carregamentos limites e estudar suas propriedades para sistemas de comportamento dúctil, sob a hipótese de pequenas deformações.

Como o comportamento é caracterizado apenas por uma limitação sobre os esforços internos admissíveis pelo material constituinte, na análise limite há apenas dois estados possíveis para um sistema estrutural: o estado em que a estrutura está resistindo às cargas e o estado em que está colapsando. Um colapso plástico real, é caracterizado pela coexistência dos dois estados: na Figura 7, a estrutura ainda tem um estado de equilíbrio das forças internas que sustentam a carga P_p durante o seu estado de colapso, embora qualquer tentativa de incremento desse carregamento resulte em deflexões ilimitadas.

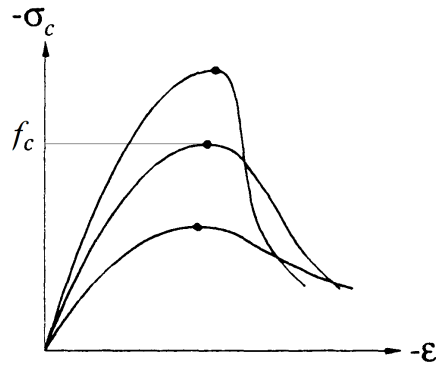
Por comparação, na teoria elástica estuda-se as respostas da estrutura às cargas em forma de tensões e deformações através de uma formulação que se baseia em *equilíbrio e compatibilidade de deformações* sem levar em conta a resistência. Na análise limite a formulação é baseada sobre *equilíbrio e resistência*. A resistência da estrutura é determinada pela capacidade de redistribuição de esforços internos dos seus elementos, o que depende da resistência do material.

1.4.1 Critério de resistência do material

A resistência de um material é obtida através de ensaios que investigam os limites da sua resistência sob estados de tensões extremos. A resistência à compressão f_c do concreto (Figura 9), ou a tensão de escoamento f_y do aço são parâmetros que expressam a resistência para estados de tensão uniaxiais.

alcançam o limite de resistência girando sob solicitação constante, como em uma rótula plástica, permitindo a formação de mecanismos de colapso. Portanto em alguns casos é possível realizar um dimensionamento que preveja ruptura dúctil, mesmo que o material seja frágil (ver (HEYMAN, 1966)).

Figura 9 – Comportamento do concreto sob compressão uniaxial para diferentes classes de resistência



(fonte: adaptado de Kaufmann (1998))

O ensaio uniaxial não é suficiente para investigar os estados de tensão admissíveis pelo material. Em diversos materiais ocorre interação entre as tensões atuantes em uma direção e a resistência atingida nas outras direções. Para o concreto sob estado plano de tensões biaxiais, por exemplo, a tração em uma direção reduz a resistência à compressão da direção perpendicular (Figura 10).

A partir de resultados de testes com estados de tensões multiaxiais pode-se propor o *critério de resistência do material*, expressão matemática que representa todos os estados de tensão $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{x})$ admissíveis em um ponto \vec{x} do material, através de uma expressão da forma geral

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0. \quad (1.1)$$

A Equação 1.1 define o *domínio de resistência* G , uma região convexa do espaço das tensões:

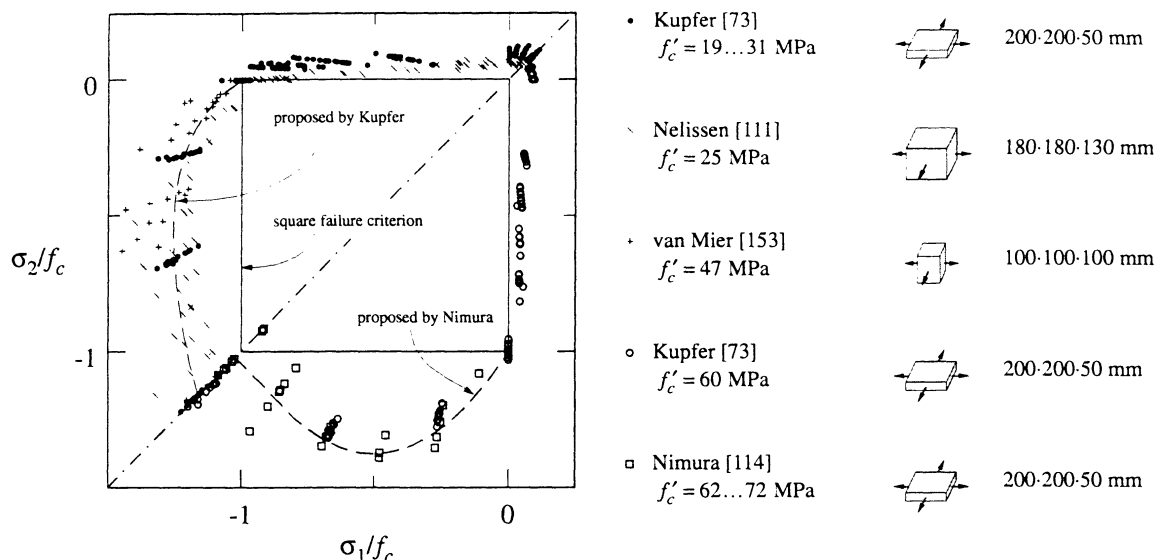
$$\underline{\underline{\sigma}} \in G \Leftrightarrow f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0. \quad (1.2)$$

O critério de ruptura quadrado ilustrado na Figura 10, por exemplo, propõe zero resistência à tração, e resistência a compressão sem interação nas tensões das duas direções, limitadas em $\sigma = f_c$.

Com a hipótese de comportamento dúctil, qualquer estado de tensões dentro de G representa um estado de tensões elásticas, sendo impossível atingir estados de tensão fora de G . Caso a *condição de escoamento* (um ponto na fronteira ∂G do domínio de resistência) seja atingida para o estado de tensões $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{x})$ em um ponto \vec{x} do corpo, taxas de deformações plásticas $\underline{\underline{d}}(\vec{x})$ são possíveis enquanto $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{x}) \in \partial G(\vec{x})$. Em outras palavras, incrementos de deformação em um ponto \vec{x} são possíveis somente se o estado de tensões $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{x})$ satisfizer a condição $f(\underline{\underline{\sigma}}(\vec{x})) = 0$:

$$\text{Escoamento no ponto } \vec{x} \Leftrightarrow f(\underline{\underline{\sigma}}(\vec{x})) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}} \in \partial G. \quad (1.3)$$

Figura 10 – Resultados de ensaios biaxiais para concreto comum (canto superior esquerdo) e de alta resistência (canto inferior direito) para corpos de prova de diferentes dimensões



(fonte: Kaufmann (1998))

O critério de resistência também pode ser expresso ao nível de estrutura, por meio de resultantes de tensão axial, por exemplo, pode-se calcular a resistência à flexão M_{pl} de uma determinada seção de aço com base no braço de alavanca da distribuição de tensões da seção plastificada. Nesse caso, o critério de resistência dependerá da geometria da seção.

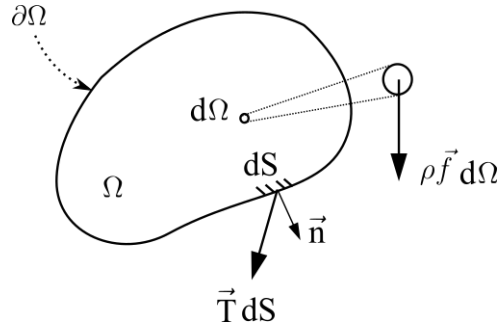
A definição do critério de resistência na modelagem de um problema, seja ele expresso para o material ou a nível de estrutura, é importante pois é o critério de resistência que definirá as formas lícitas de colapso da estrutura no problema. Um critério de resistência que impõe limites somente sobre a flexão, por exemplo, não será capaz de expressar um modo de ruptura por esforço cortante, e portanto não apresentará resultados realistas para vigas curtas.

1.4.2 Descrição da geometria e carregamento

Para a modelagem, considera-se um corpo definido pelo volume Ω com forças de volume especificadas $\rho \vec{f}$, delimitado pelo contorno $\partial\Omega$ no qual as forças (cargas) T_i^d são dadas em uma porção Γ_T de $\partial\Omega$ e as condições de contorno sobre as velocidades V_i^d são dadas na porção complementar Γ_v do contorno, onde componentes das velocidades são especificadas como nulas (Figura 11).

Para um sistema submetido a um modo de carregamento com n parâmetros Q_1, \dots, Q_n em uma dada geometria, examina-se os carregamentos (combinações de parâmetros de carregamento) sob os quais há *compatibilidade* entre o *equilíbrio* do sistema e as limitações induzidas pela

Figura 11 – Representação do problema em um sólido tridimensional geral



(fonte: elaborado pelo autor)

resistência do material constitutivo.

A resistência da estrutura é baseada na possibilidade de existência de um campo de tensões qualquer que seja capaz de equilibrar as cargas atuantes dentro das limitações de resistência impostas pelo material. Um campo de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$ que equilibra as cargas externas Q_i deve satisfazer a equação de equilíbrio local e respeitar as condições de contorno de forças T_i^d , e, neste caso, é chamado de *campo de tensões estaticamente admissível*:

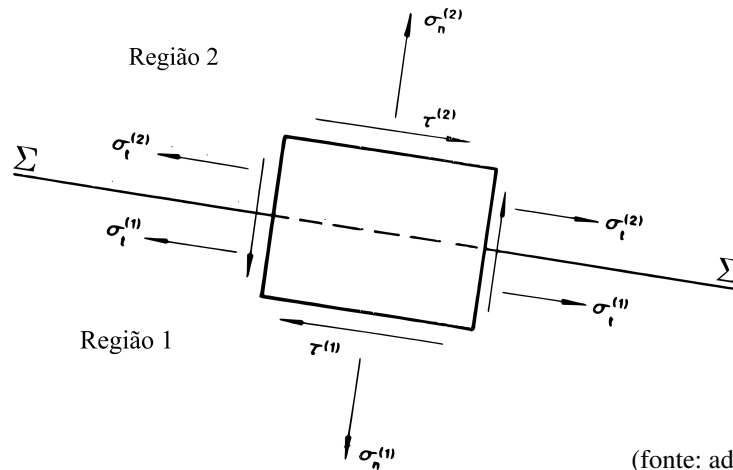
$$\underline{\underline{\sigma}} \text{ estaticamente admissível} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} \text{ satisfaz o equilíbrio: } \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \vec{f} = 0 \\ \underline{\underline{\sigma}} \text{ respeita as c.c.: } \sigma_{ij}(\vec{x})n_j = T_i^d(\vec{x}) \text{ sobre } \Gamma_T, \end{cases}$$

onde n_j é a componente do vetor normal unitário cartesiano da direção j .

Admite-se que o campo de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$ possua descontinuidades ao longo de determinadas superfícies Σ . A continuidade do vetor tensão $\vec{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}$ (que expressa o princípio da ação e reação), no entanto, impõe apenas que a componente normal de $\underline{\underline{\sigma}}$ em Σ seja contínua (Figura 12):

$$\sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(2)} \quad (1.4)$$

A possibilidade de trabalhar com campos de tensões descontínuos mostra-se útil na aplicação de

Figura 12 – Descontinuidade do campo de tensões na superfície Σ 

(fonte: adaptado de Chen (1988))

métodos estáticos, como será mostrado no capítulo 2.

1.4.3 O teorema das potências virtuais

Um estado de colapso é um estado em que existe a possibilidade de movimento. É intuitivo que o colapso de uma estrutura ocorre quando as forças atuantes são tão grandes que conseguem “vencer” as forças resistentes internas de “alguma forma”. A expressão dessa prevalência da ação das forças externas sobre a capacidade das forças internas de equilibrá-las também pode ser analisada a partir do teorema das potências virtuais, que expressa as equações de equilíbrio local de forma dualizada, ou seja, equivalente ao equilíbrio local. A ação das forças externas superando a resistência das forças internas é expressa pela comparação entre a potência das forças externas e a potência das tensões internas durante um movimento virtual.

A cinemática do movimento virtual é descrita por campos de velocidade virtual \vec{V} e as taxas de deformações virtuais correspondentes \underline{d} . Os campos de velocidade virtual \vec{V} são funções de teste para analisar a possibilidade colapso, e devem ser compatíveis com as taxas de deformações virtuais internas \underline{d} , e respeitar as condições de contorno sobre as velocidades V_i^d . Um movimento virtual \vec{V} , \underline{d} que satisfaz essas condições é dito *cinematicamente admissível*.

$$\vec{V} \text{ cinematicamente admissível} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{V} \text{ é compatível com } \underline{d}: & \underline{d} = \frac{1}{2} (\text{grad } \vec{V} + {}^t \text{grad } \vec{V}) \\ \vec{V} \text{ respeita as c.c.:} & V_i(\vec{x}) = V_i^d(\vec{x}) \text{ sobre } \Gamma_V. \end{cases}$$

A potência P_{ext} exercida pelas cargas externas durante um movimento virtual é expressa pela soma das taxas de trabalho externo realizado por cada componente de carga durante uma deformação, dada pelo produto do parâmetro de carga Q_i com a velocidade generalizada \dot{q}_i associada:

$$P_{ext} = Q_1 \dot{q}_1 + Q_2 \dot{q}_2 + \dots + Q_n \dot{q}_n = \vec{Q} \cdot \vec{\dot{q}}. \quad (1.5)$$

A potência P_{def} das tensões locais $\underline{\sigma}$ durante um movimento virtual \vec{V} , é dada pela integral do produto entre as tensões e as taxas de deformação associadas:

$$P_{def} = \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\dot{d}} dV. \quad (1.6)$$

O teorema das potências virtuais afirma que o equilíbrio de um campo de tensões $\underline{\sigma}$ estaticamente admissível com um carregamento \vec{Q} é equivalente à igualdade entre a potência das forças externas e a potência das forças internas para um movimento virtual qualquer que seja cinematicamente admissível, i.e. a existência de um campo de tensões

$$\underline{\sigma} \text{ estaticamente admissível com } \vec{Q}$$

equivale à afirmação de que

$$\forall \vec{V} \text{ cinematicamente admissível, } \vec{Q} \cdot \vec{V} = \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{d} dV.$$

Essa relação expressa matematicamente a ideia intuitiva de que se qualquer movimento cinematicamente admissível puder existir sob o qual as forças externas “vencem” as forças resistentes internas ($P_{ext} > P_{def}$), esse movimento de fato acontecerá, tirando a estrutura do estado de equilíbrio.

1.4.4 Abordagem estática e carregamento suportável

Partindo das definições apresentadas até aqui, pode-se definir os teoremas da análise limite, que serão enunciados sem provas, as quais podem ser conferidas nas referências citadas na introdução da seção 1.4.

Teorema Estático ou Teorema do Limite Inferior (TLI)

É impossível a ocorrência de colapso, no sentido da análise limite, sob um carregamento para o qual existe um estado de tensões estaticamente admissível que não viola o critério de resistência.

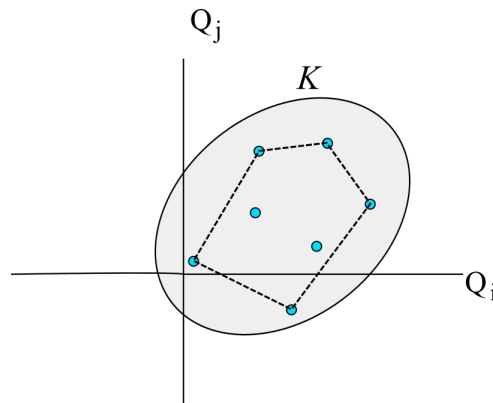
Para um carregamento de múltiplos parâmetros Q_i , as combinações lineares dos parâmetros de carregamento Q_i para as quais é impossível ocorrer colapso segundo as condições do TLI definem o conjunto K das cargas suportáveis:

$$\vec{Q} \text{ suportável} \Leftrightarrow \vec{Q} \in K \Leftrightarrow \exists \underline{\sigma} \text{ t.q. } \begin{cases} \underline{\sigma} \text{ estaticamente admissível com } \vec{Q} \rightarrow (\text{estrutura}) \\ f(\vec{x}) \leq 0 \quad \forall \vec{x} \in \Omega \rightarrow (\text{material}) \end{cases}$$

Se um modo de carregamento $[Q_s]$ que é proporcional a somente um parâmetro ($[Q_s] = \lambda_s [Q]$) cumpre as condições do TLI, então é um limite inferior $[Q]_s^+$ para a carga de ruptura $[Q_s^u]$.

A abordagem estática da análise limite consiste em construir o domínio K pelo interior, utilizando propriedades como a convexidade de K , que é consequência da convexidade do domínio G : um envelope convexo de carregamentos no interior de K é incluído no interior de K (Figura 13). Qualquer carregamento no interior do envelope pode ser resistido pela estrutura.

Figura 13 – Abordagem estática: construção do domínio dos carregamentos suportáveis K pelo interior



(fonte: elaborado pelo autor)

1.4.5 A abordagem cinemática e o teorema cinemático

Para a abordagem cinemática geral da análise limite, a potência resistente máxima P_{rm} é definida como a maior potência que o contínuo é capaz de desenvolver sob um movimento virtual. Nesse caso o teorema cinemático afirma que se existir um movimento cinematicamente admissível sob o qual a potência das cargas externas P_{ext} supera P_{rm} , esse carregamento não é suportável.

Teorema Cinemático ou Teorema do Limite Superior (TLS)

O colapso deve ocorrer sob um carregamento para o qual pode ser especificado um campo de velocidades cinematicamente admissível tal que P_{ext} seja maior do que P_{rm} .

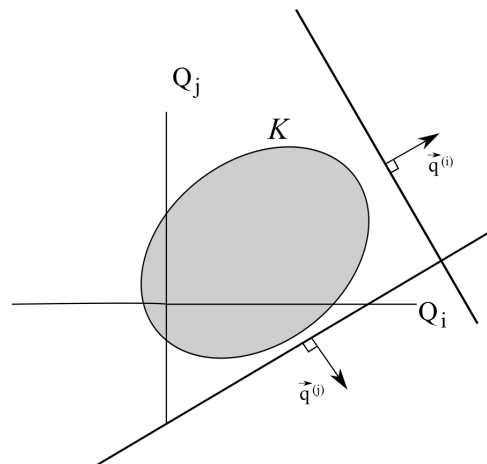
Assim, qualquer modo de carregamento uniparamétrico que cumpre a condição do TLS define um limite superior para a carga de colapso. Um movimento virtual que cumpre a condição do TLS introduz um grau de liberdade ao sistema e é chamado de *mecanismo de colapso*.

No espaço das cargas, a condição

$$\vec{Q} \cdot \dot{\vec{q}}(\vec{V}^{(i)}) \leq P_{rm}(\vec{V}^{(i)}) \quad (1.7)$$

define um hiperplano para cada mecanismo de colapso virtual $\vec{V}^{(i)}$. Assim, a abordagem cinemática consiste em considerar um certo número de mecanismos de colapso de forma a construir o domínio K pelo exterior (Figura 14). Qualquer carregamento fora da região delimitada pelos hiperplanos é capaz de causar o colapso da estrutura.

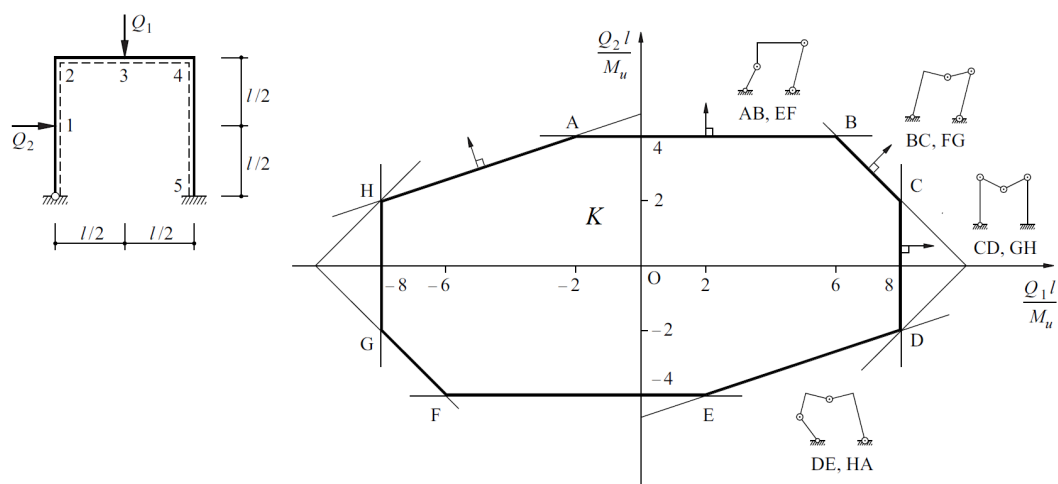
Figura 14 – Abordagem cinemática: construção do domínio dos carregamentos suportáveis K pelo exterior



(fonte: elaborado pelo autor)

O domínio de resistência K representa todas as combinações de carregamentos suportáveis pela estrutura. A Figura 15 ilustra a construção de K para um pórtico plano com carregamento caracterizado por dois parâmetros Q_1 , Q_2 : cada mecanismo de colapso define uma reta no espaço das cargas. Quando um carregamento representa um limite inferior e um limite superior, obtidos através do emprego dos teoremas estático e cinemático, respectivamente, o mesmo corresponde

Figura 15 – Exemplo de domínio de resistência e modos de ruptura associados para um pórtico plano sob carregamento de 2 parâmetros



(fonte: (MARTI, 2013))

a uma *solução exata* no contexto da análise limite. No exemplo simples da Figura 15, é possível mostrar que a cada mecanismo corresponde uma distribuição de momentos estaticamente admissível que não viola o critério $|M| < M_u$. Assim, neste exemplo, o domínio K é a solução exata e contém todas as informações possíveis sobre o colapso do pórtico, sob as hipóteses adotadas.

1.5 CONTEXTUALIZAÇÃO E OBJETIVO DO TRABALHO

Métodos de cálculo de aplicação manual são essenciais para o projeto de estruturas de concreto armado pois auxiliam na concepção estrutural, pré-dimensionamento e dimensionamento de elementos e a verificação de resultados obtidos por programas de computador.

Os métodos manuais baseados na hipótese de comportamento elástico para cálculo de esforços e deslocamentos de estruturas hiperestáticas sempre são encontrados nos currículos de disciplinas dedicadas a estruturas e são usualmente implementados em softwares comerciais dedicados à análise de estruturas.

Menos difundidos atualmente (ao menos no contexto atual local da prática brasileira) são os métodos de cálculo manual baseados na hipótese de comportamento dúctil para o cálculo da estrutura no estado de ruptura. O domínio de métodos clássicos de cálculo na ruptura dedicados ao concreto armado pode ser uma adição valiosa ao repertório de cálculo de um profissional.

O estudo da análise limite e métodos associados também gera entendimento sobre a aplicabilidade e limitações de diversas expressões e recomendações apresentadas nas normas para o dimensionamento de estruturas de concreto.

Além disto, a boa concordância dos resultados de métodos da análise limite com medições experimentais e o desenvolvimento de novos algoritmos vêm motivando a emergência de softwares comerciais para dimensionamento e detalhamento de armaduras baseados em implementações

numéricas da análise limite². O estudo dos métodos manuais clássicos pode suprir a necessidade de introdução aos fundamentos teóricos para a utilização consciente destes softwares.

O objetivo principal deste trabalho consiste em reunir métodos de cálculo para análise e dimensionamento de elementos de concreto armado que sejam fundamentados ou associados com a teoria da análise limite, a fim de obter ferramentas para lidar com situações práticas diversas de dimensionamento. Os métodos pesquisados foram concebidos previamente à difusão de programas de computador para análise de estruturas, portanto foram criados para aplicações manuais, o que pode ser feito com relativa facilidade. O trabalho busca resgatar estes métodos e evidenciar as semelhanças que possuem entre si através de suas ligações com os teoremas da análise limite.

O interesse deste trabalho está longe de ser puramente acadêmico, e tem a intenção de auxiliar aqueles que encontraram ou virão a encontrar a necessidade ou o desejo de utilizar o conhecimento sobre o concreto estrutural na prática profissional da engenharia estrutural. O trabalho também busca indicar referências nas quais se encontram exposições muito mais completas sobre cada assunto.

² Exemplos de softwares comerciais são IdeaStatica Detail, OptumCE e LimitState:slab. Algumas teses dedicadas ao desenvolvimento de métodos numéricos são (NIKETIĆ, 2017), (VINCENT, 2018) e (LARSEN, 2011).

2 MÉTODOS TRADICIONAIS ASSOCIADOS À ABORDAGEM ESTÁTICA DA ANÁLISE LIMITE

Resumo: Nesse capítulo são apresentados os métodos tradicionais de cálculo para concreto armado associados à abordagem estática da análise limite, baseados na construção de campos de tensões estaticamente admissíveis e verificação da resistência.

2.1 INTRODUÇÃO

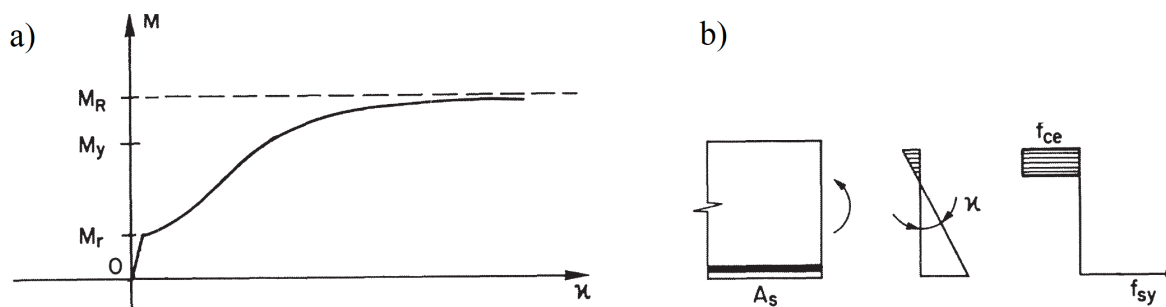
O teorema estático (subseção 1.4.4) permite uma definição com base física para a segurança à ruptura no projeto de uma estrutura de comportamento dúctil para a qual o critério de resistência esteja disponível. Se um campo de tensões estaticamente admissível com a carga de projeto puder ser encontrado, que não viole o critério de resistência, então o teorema garante que a carga de ruptura é maior ou igual à carga de projeto. A confiabilidade de um resultado baseado no teorema estático depende da validade da hipótese sobre o comportamento dúctil do material: a redistribuição gradual de esforços internos do início do escoamento até a ruptura deve ser possível, através de uma capacidade de deformação (ductilidade) suficiente.

O concreto simples apresenta ruptura frágil sob compressão e resistência muito pequena sob tração. Este fato, no entanto, não inviabiliza a aplicação da abordagem estática para o concreto armado, pois há maneiras de controlar o comportamento do elemento na ruptura para obter ductilidade. Para estruturas que trabalham predominantemente sob flexão, uma seção pode ser dimensionada para que a curvatura sob o momento M_y em que inicia o escoamento do aço seja desprezível quando comparada com a curvatura total atingida no momento de ruptura M_R . Pode-se então assumir a hipótese de comportamento dúctil. A Figura 16 ilustra a curva momento-curvatura típica para uma viga de concreto armado em flexão. Verifica-se o comportamento dúctil deste material composto.

Para estruturas fortemente armadas a resistência das seções é limitada principalmente pela resistência a compressão do concreto, pois a ruptura envolverá o esmagamento de zonas de concreto comprimido antes que ocorra o escoamento do aço. Mas a fragilidade do concreto em compressão (queda de resistência brusca após a tensão de pico (Figura 9)) significa que as zonas de concreto tem pouca capacidade de deformação. Quando um material é frágil, a análise limite superestima a resistência da estrutura.

É possível levar em conta essa ductilidade limitada do concreto, contornando o problema através do uso de uma *resistência efetiva* $f_{ce} = k_c f_{ck}$, valor reduzido para a resistência à compressão f_{ck} (KAUFMANN, 1998, p.41). O valor apropriado da resistência efetiva f_{ce} é especificado em normas. Ele depende do estado de fissuração esperado, consequência das deformações transversais, e da presença ou não de armadura transversal, e varia para cada zona do elemento de

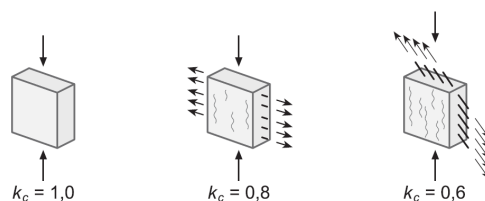
Figura 16 – a) Curva momento M – curvatura χ típica para uma viga de concreto armado em flexão simples: M_r – momento de fissuração; M_y – momento do início do escoamento do aço; M_R – momento último plástico da seção. b) Rotação e distribuição de tensões no concreto f_{ce} e no aço f_{sy} sob o momento de ruptura M_R na seção com área de aço A_s .



(fonte: adaptado de Muttoni et al. (1997))

concreto (Figura 17). Assim, o emprego da resistência efetiva possibilita que a análise limite seja aplicada às estruturas de concreto. A capacidade de redistribuição necessária e o comportamento

Figura 17 – Exemplo de fatores de redução k_c para a resistência de zonas de almas de vigas e paredes: a) zonas comprimidas sem deformações impostas b) zonas com fissuras paralelas ao sentido da compressão ou armadura tracionada perpendicular ao sentido da compressão c) zonas fissuradas e com armadura em ângulo com o sentido de compressão



(fonte: adaptado de Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein (2003))

dúctil no ELU podem ser garantidos nos casos comuns através da observação de taxas mínimas e máximas de armadura definidas nas normas. Não se pode esperar que uma estrutura real venha, no entanto, a atingir qualquer distribuição de tensões estaticamente admissível assumida. Para o concreto armado, quanto mais destoante da distribuição elástica de tensões for aquela assumida para o ELU, mais se estará exigindo da capacidade de redistribuição de esforços internos, que acontecerá à custa de fissuração e escoamento da armadura.

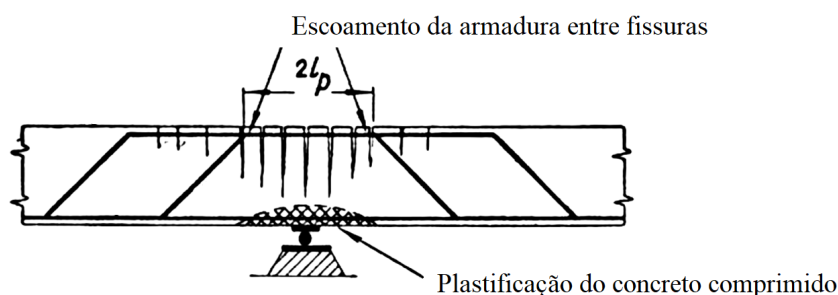
2.2 MÉTODOS DO TIPO ESTÁTICO NO CÁLCULO DE VIGAS

2.2.1 Análise plástica e redistribuição momentos

A aplicação mais simples de conceitos da abordagem estática consiste em métodos de análise com rótulas plásticas e redistribuição de momentos para o cálculo unidimensional de vigas contínuas em flexão. O emprego de rótulas plásticas para verificação da capacidade carga, também chamada de análise plástica na norma brasileira, considera rótulas idealizadas localizadas nas seções

críticas para o cálculo dos esforços solicitantes na ruptura (Figura 18), que giram sob momento constante igual ao momento de ruptura da seção M_u .

Figura 18 – Uma rótula plástica em uma viga na região de um apoio é um estado localizado de fissuração do concreto e escoamento da armadura que acontece ao longo de um certo comprimento $2l_p$. Quando $l_p \ll L$, onde L é o comprimento do vão adjacente, pode-se assumir na análise que a rótula é uma seção que gira sob momento igual ao momento último M_u .



(fonte: adaptado de Carneiro (1960))

A condição de ductilidade em vigas de concreto armado com f_{ck} até 50MPa para aplicação da análise plástica em verificações no ELU é $x/d \leq 0,25$, onde x é a altura da linha neutra e d é a altura útil. A condição garante que a ruptura não seja definida pelo esmagamento da zona comprimida, mas pelo escoamento da armadura. Se for necessário exceder este limite, uma avaliação da capacidade de rotação plástica torna-se necessária (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014). A necessidade da verificação da capacidade de rotação e da fissuração em serviço tornam a aplicação da análise plástica simples em vigas de concreto armado pouco atraente. Outra aplicação relacionada, bastante útil para o dimensionamento consiste nas técnicas de redistribuição de momentos.

Em situações práticas do dimensionamento de vigas e lajes unidirecionais contínuas é eventualmente conveniente redistribuir os momentos calculados na região dos apoios por métodos elásticos e aumentar o momento nos vãos, para descongestionar armaduras e reduzir o consumo de aço. A norma brasileira permite a redução, por exemplo, de um momento fletor M para δM com $\delta \geq 0,75$ para estruturas de nós fixos (efeitos de 2ª ordem globais desprezíveis).

A condição de ductilidade da norma brasileira nesse caso (redistribuição de momentos) é, para $f_{ck} \leq 50\text{MPa}$, dada por

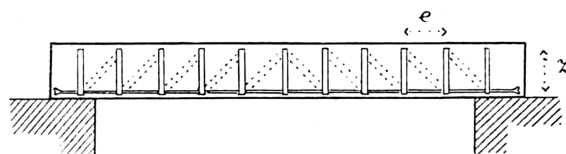
$$x/d \leq (\delta - 0,44)/1,25. \quad (2.1)$$

As estruturas planas e tridimensionais, com sua hiperstaticidade infinita inerente, têm grande capacidade de redistribuição, permitindo certas liberdades com as escolhas de armaduras. Nas lajes, por exemplo, há a possibilidade de redistribuição de momentos de uma direção para outra. Assim, é possível controlar quais vigas de suporte recebem mais carga de uma laje simplesmente pela configuração das armaduras, como explicado na subseção 2.4.1.

2.2.2 Breve histórico do desenvolvimento de métodos do tipo estático para o dimensionamento de vigas sob esforço cortante

O sistema Hennebique, do início do século XX, foi a primeira patente para sistemas monolíticos de vigas e pilares de concreto armado. As vigas eram armadas com estribos formados por barras de aço chatas a fim de resistir à força cortante. Para calcular a força cortante máxima permitida

Figura 19 – A treliça de Ritter para o cálculo da área dos estribos

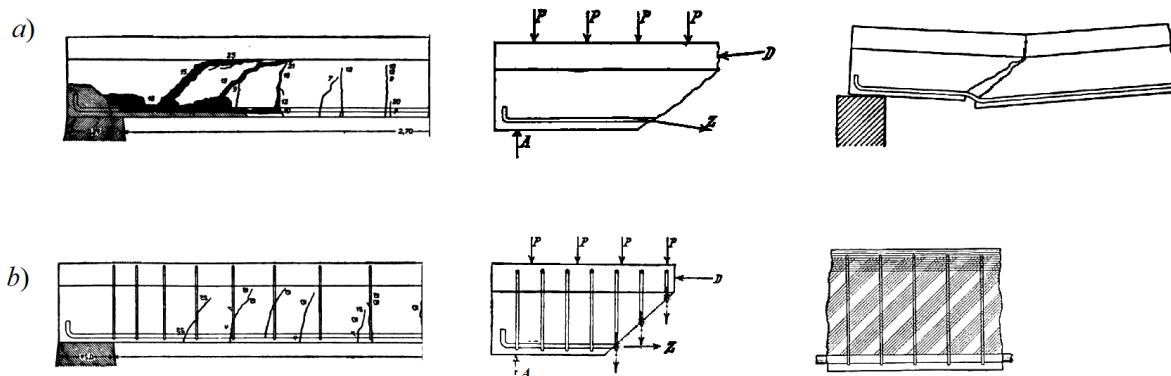


(fonte: Ritter (1899))

para uma viga do sistema Hennebique, Ritter parte da analogia com uma treliça isostática: “os estribos, junto com as barras (longitudinais) e o concreto formam um tipo de treliçado, onde os estribos representam montantes tracionados e o concreto representa diagonais comprimidas” (RITTER, 1899). Partindo desta hipótese, a força cortante Q é relacionada com a tensão nos estribos. O dimensionamento então baseado neste modelo requeria que o espaçamento e entre os estribos fosse igual ao braço de alavanca z .

Figura 20 – Observações de Mörsch (1910) sobre o efeito de estribos verticais na alma de uma viga T:

- A viga sem armadura transversal rompe pela formação de uma fissura diagonal, causada pela tensão diagonal na região de esforço cortante, que se propaga até a laje separando a viga em duas partes.
- Na viga armada com estribos verticais, estes resistem à separação que ocorreria na fissura diagonal, sugerindo a ação análoga a montantes de uma treliça hiperestática.

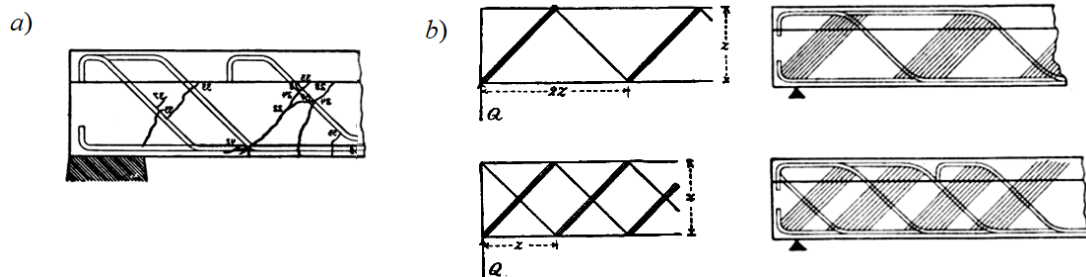


(fonte: adaptado de Mörsch (1910))

Na década seguinte, o modelo de treliça foi aperfeiçoado por Mörsch (1910), a partir de experimentos de ruptura de vigas sob esforço cortante. Mörsch contribuiu com a criação de um modelo de treliça hiperestática a partir da comparação das formas de ruptura entre vigas armadas e não armadas transversalmente (Figura 20). Assim como no modelo de Ritter, a configuração da armadura dimensionada deve ser compatível com a geometria do modelo adotado: quanto maior

fosse o grau de hiperestaticidade da treliça do modelo, mais distribuída a armadura transversal (Figura 21).

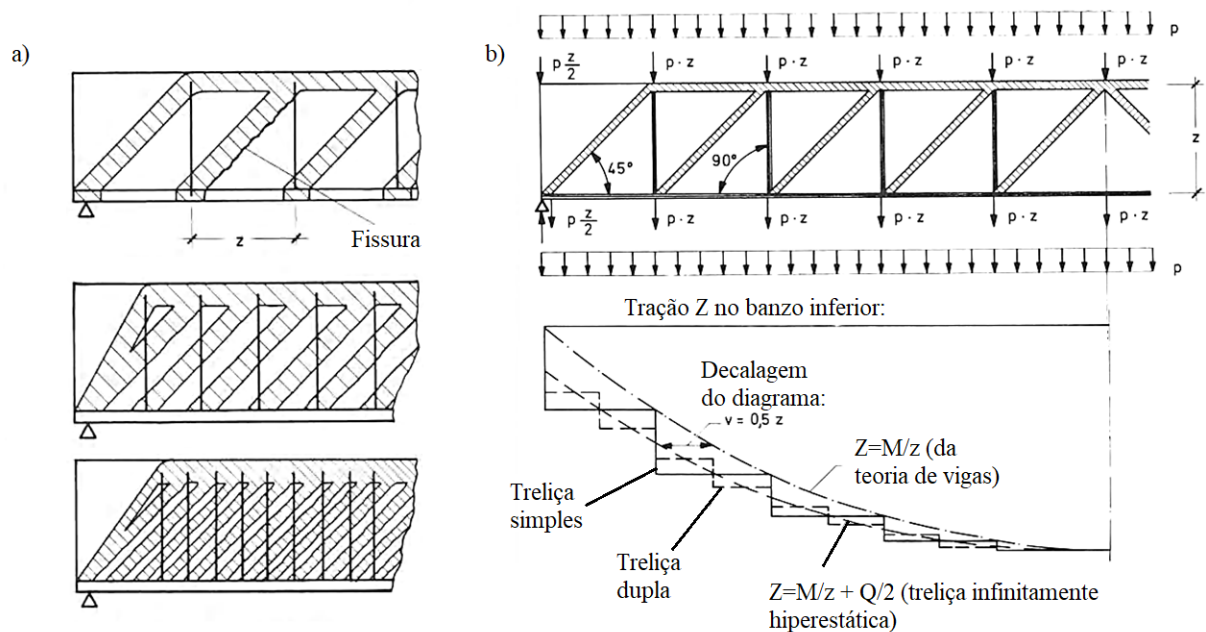
Figura 21 – a) Padrão de fissuração para uma viga com armadura inclinada nos apoios
b) Modelo de treliça simples com espaçamento $2z$ e modelo de treliça dupla, com a metade do espaçamento e metade da força de tração em cada barra diagonal.



(fonte: adaptado de Mörsch (1910))

O modelo da treliça n -vezes hiperestática, quando generalizado para $n = \infty$ (infinitas treliças sobrepostas), torna-se infinitamente hiperestático, ou seja, trata-se de um tipo de campo de tensões (Figura 22).

Figura 22 – a) Evolução do um modelo de treliça simples para um modelo de treliça infinitamente hiperestático (campos de tensões).
b) Os esforços calculados com modelos discretos variam em saltos. No modelo de campos de tensões, os esforços variam continuamente. A tração Z difere da calculada segundo a teoria de vigas pelo termo $Q/2$, razão para a regra de decalagem do diagrama de momentos calculado para a viga unidimensional.



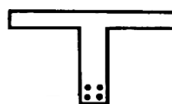
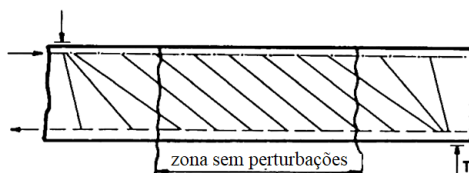
(fonte: adaptado de (LEONHARDT; MÖNNIG, 1977))

Quando os estribos são bem distribuídos, as forças de tração nestes agem como um campo de tração uniaxial sobreposto ao campo de compressão diagonal do concreto na alma da viga, portanto não há necessidade de encaixar uma treliça propriamente dita, com barras discretas, na

viga. As únicas informações relevantes para descrição do campo de tensões da alma são o ângulo θ assumido para o campo de compressão e o espaçamento s e inclinação α dos estribos.

Na década de 1960, o modelo da treliça voltou a ser investigado, sendo generalizado para inclinações menores que 45° do campo de compressão (RÜSCH, 1965). Na mesma época desenvolvia-se a aplicação da análise limite para o concreto armado, portanto o modelo de treliça evoluiu para uma descrição dos esforços na viga através de um campo de tensões estaticamente admissível, com a distinção entre o campo de tensões uniaxiais de compressão do concreto da alma e um campo de tensões “em leque” nos apoios ou sob cargas concentradas (Figura 23). Esta generalização, com a verificação da resistência no aço e no concreto, representam a procura

Figura 23 – Aprimoramento da descrição dos esforços na viga pela divisão do campo de tensões em regiões bem demarcadas



(fonte: adaptado de Kupfer (1964))

por coerência com as condições do teorema estático da análise limite: equilíbrio e resistência em todos os pontos, garantindo a base teórica da segurança do dimensionamento.

2.2.3 A relação entre as expressões usuais para dimensionamento ao esforço cortante e a análise limite

O campo de tensões associado à treliça para a alma de uma viga faz uso do conceito de descontinuidade de tensão apresentado na subseção 1.4.2, e é formado pela superposição do campo de compressão uniaxial diagonal do concreto com o campo de tração estaticamente equivalente aos estribos, como ilustra a Figura 24. As tensões de tração em EF e GH equilibram a componente horizontal das tensões de compressão em AB e CD ao longo da região de superposição. A figura Figura 24-c ilustra a construção do campo de tensões da alma da viga, obtido pela superposição: as componentes longitudinais desbalanceadas ilustradas em preto, são transmitidas às flanges. Pela soma vetorial das tensões resultantes nas fronteiras (Figura 24-c) vê-se que a escolha de estribos inclinados aumenta as forças nas flanges.

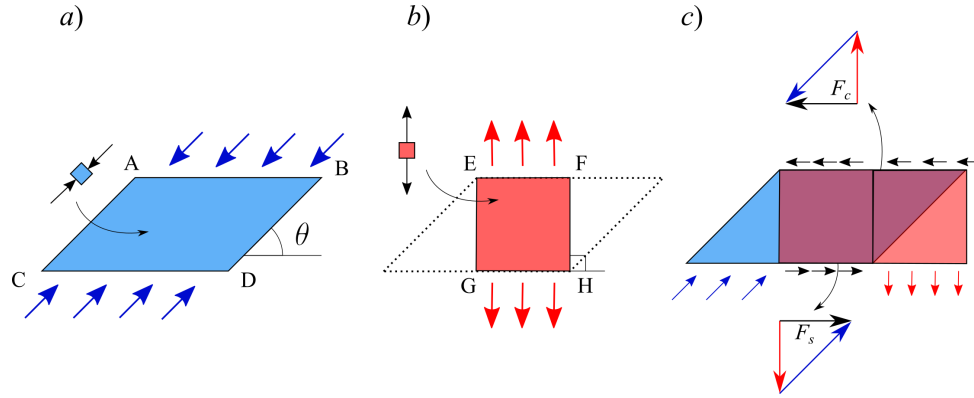
As expressões usuais para o dimensionamento ao esforço cortante podem ser obtidas da análise da relação entre o esforço cortante na seção e o campo de tensões para a alma da viga com estribos (Figura 25). O equilíbrio das forças no triângulo, na direção vertical, dá

$$f_w z \cot \theta = V_d, \quad (2.2)$$

onde f_w é a força por unidade de comprimento no grupo de estribos. O critério de resistência para os estribos com taxa linear de aço $a_{sw} = A_{sw}/s$, onde A_{sw} é a área de aço de um estribo e s

Figura 24 – Equilíbrio do campo de tensões associado ao modelo de treliça para a alma de uma viga:

- a) Campo de compressão diagonal uniaxial no concreto, com inclinação θ
- b) Campo de tração do grupo de estribos verticais
- c) Superposição de um campo de compressão do tipo ABCD com dois campos do tipo EFGH.



(fonte: elaborado pelo autor)

é o espaçamento, é expresso por

$$f_w \leq \frac{A_{sw}}{s} f_{ywd}, \quad (2.3)$$

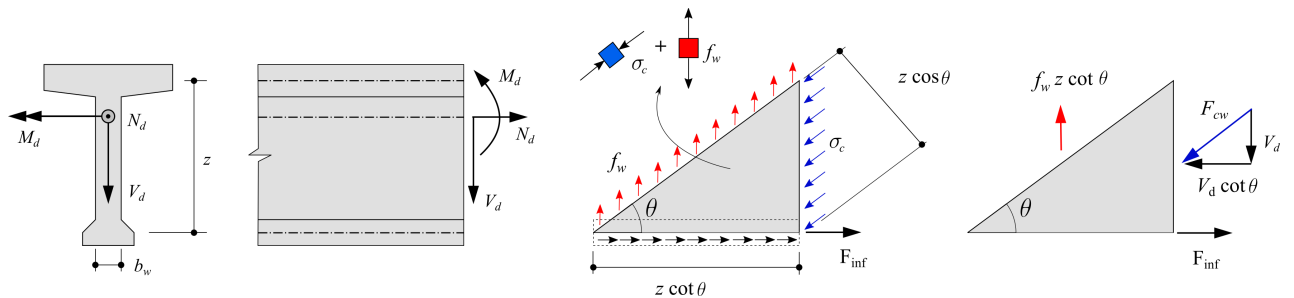
onde f_{ywd} é a tensão de escoamento do aço utilizado para a armadura transversal.

Do equilíbrio expresso pela Equação 2.2 e do critério na Equação 2.3 resulta a expressão para a resistência ao esforço cortante V_{sw} determinada pelo escoamento do aço nos estribos:

$$V_d \leq V_{sw} = \frac{A_{sw}}{s} 0,9 f_{ywd} d \cot \theta, \quad (2.4)$$

para a qual foi adotado $z = 0,9d$, onde d é a altura útil da viga. A expressão é idêntica à da norma NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014, p.137) para o chamado “modelo de cálculo II”, para o caso de estribos verticais ($\alpha = 90^\circ$).

Figura 25 – Relação entre o campo de tensões da alma e a solicitação V_d sobre a seção.



(fonte: elaborado pelo autor)

Níveis seguros para as tensões de compressão no concreto da alma também devem ser assegurados. A resultante F_{cw} das tensões na alma se relaciona com o esforço cortante por

$$F_{cw} = \sigma_c b_w z \cos \theta = \frac{V_d}{\sin \theta},$$

de onde resulta

$$V_d = \sigma_c b_w z \sin \theta \cos \theta. \quad (2.5)$$

Para que as tensões no concreto não superem a resistência a compressão, é preciso adotar um critério de resistência para o concreto. A norma NBR 6118 de 2014 adota o valor f_{cd} :

$$\sigma_c \leq 0,6\alpha_{v2}f_{cd}, \quad (2.6)$$

onde o fator 0,6 leva em conta a redução da resistência à compressão pelo efeito fissuração causada pela tração transversal na armadura, e o fator $\alpha_{v2} = (1 - f_{ck}/250)$ leva em conta o efeito da fragilidade do concreto. Estes fatores representam o uso de uma resistência efetiva f_{ce} como discutido na introdução deste capítulo. Das equações 2.5 e 2.6 resulta a condição sobre o esforço cortante máximo limitado pelo esmagamento do concreto V_{Rd2}

$$V_d \leq V_{Rd2} = 0,54\alpha_{v2}f_{cd}b_w d \sin \theta \cos \theta, \quad (2.7)$$

que é a mesma expressão que se obtém pelo “modelo de cálculo II” da NBR6118 para estribos verticais. A escolha para a inclinação θ do campo de compressão no concreto é limitada, na NBR 6118, por $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$.

Assim, as expressões para o dimensionamento da alma de vigas lineares (elementos cujo menor vão tem pelo menos 3 vezes a maior dimensão da seção transversal (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014, p.83)) são baseadas sobre considerações do equilíbrio de forças e critérios de resistência para o aço e o concreto, e portanto cumprem com as condições do teorema estático da análise limite.

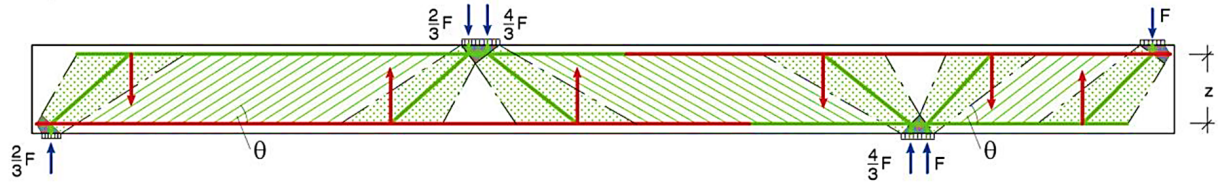
As expressões da norma não se baseiam completamente sobre o equilíbrio do campo de tensões diagonal, pois a resistência ao esforço cortante calculada através do modelo da treliça não leva em conta outros modos relevantes de transferência do esforço cortante, que são expressos por uma parcela adicional de resistência V_c . O dimensionamento dos estribos é realizado, assim, com base na expressão

$$V_{Sd} \leq V_{Rd3} = V_{sw} + V_c.$$

A busca pela forma correta para o cálculo de V_c levou à criação de numerosas teorias e métodos de cálculo que influenciaram as normas internacionais de maneiras distintas. Uma exposição completa sobre o assunto pode ser encontrada em (ACI COMMITTEE 445, 2002). Maiores informações sobre o papel da abordagem estática no cálculo da resistência ao esforço cortante podem ser encontradas em Reineck et al. (2011).

A Figura 26 ilustra um campo de tensões completo, construído com campos de tensões descontínuos, para uma viga com balanço. As expressões contidas na norma para V_{Rd} aplicariam-se, a princípio, somente às regiões da alma onde θ é constante. Na prática, é aceitável tomar o valor da força cortante solicitante V_{Sd} na seção junto ao apoio (ou a uma distância d da face do apoio para

Figura 26 – Modelo de treliça e campo de tensões associado para uma viga com balanço. O uso das expressões contidas nas normas, a rigor, aplica-se ao campo de tensões de inclinação constante θ , longe das descontinuidades de carregamento. Em regiões de descontinuidade de geometria ou carregamento, pode ser necessário construir um modelo de bielas e tirantes.

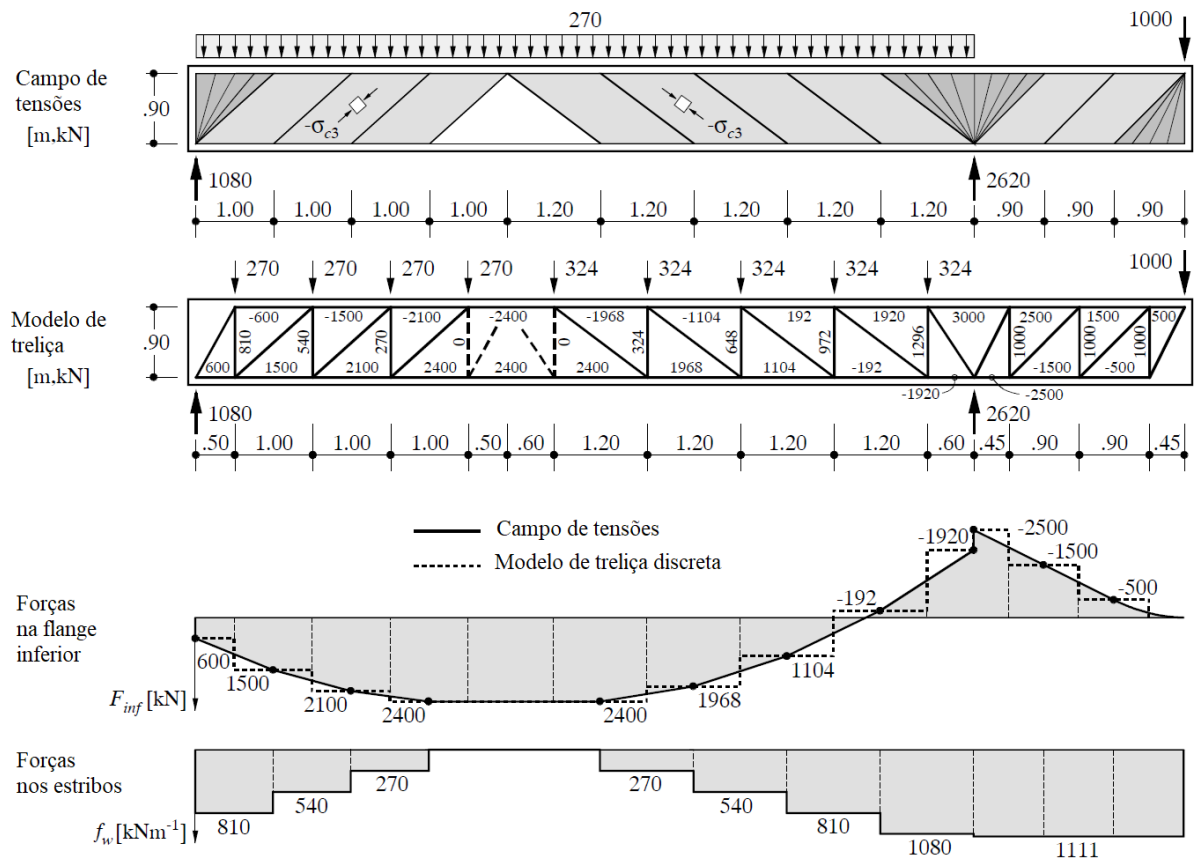


(fonte: Reineck et al. (2011))

o dimensionamento dos estribos na regiões dos apoios representada pelos campo de tensões em leque na Figura 26. Dependendo da forma de aplicação da carga concentrada, a elaboração de um modelo de bielas e tirantes pode se tornar necessária (seção 2.3). (MUTTONI et al., 1997).

Os esforços internos em vigas para o dimensionamento da armadura longitudinal são obtidos, em geral, pela análise através do modelo de barra. Também é possível obter os esforços diretamente de um modelo de campo de tensões completo, como ilustrado na Figura 27 para uma viga sob carga distribuída no vão, com o modelo de treliça discreto associado.

Figura 27 – . Modelo de campo de tensões e de treliça discreta para a alma de uma viga



(fonte: adaptado de Marti et al. (1999))

Os efeitos das regras para os diagramas calculados para o modelo de barra, como a decalagem do diagrama de momento fletor M e a redução da força cortante V junto ao apoio, são automaticamente levados em conta. O procedimento é mais complexo do que o dimensionamento usual pelo modelo de barra, mas permite a generalização para vigas de geometria variável e seções mais complexas, como vigas caixão. O procedimento para construção de campos de tensões para diversas classes de vigas pode ser encontrado em

Esta seção procurou evidenciar o significado de utilizar as fórmulas disponíveis em normas para o dimensionamento de vigas ao esforço cortante. As expressões das normas para o dimensionamento à torção seguem de uma dedução semelhante. Pode-se combinar a aplicação destas expressões com a elaboração de campos de tensões ou modelos de bielas e tirantes para regiões de descontinuidade estática ou geométrica de forma consistente. A generalização do procedimento de dimensionamento baseado no equilíbrio de modelos de barras discretas para outros tipos de elementos, conexões e condições de apoio que fogem ao escopo das expressões baseadas no modelo de treliça foi justamente o que deu origem aos procedimentos de dimensionamento com modelos de bielas e tirantes, apresentado na próxima seção.

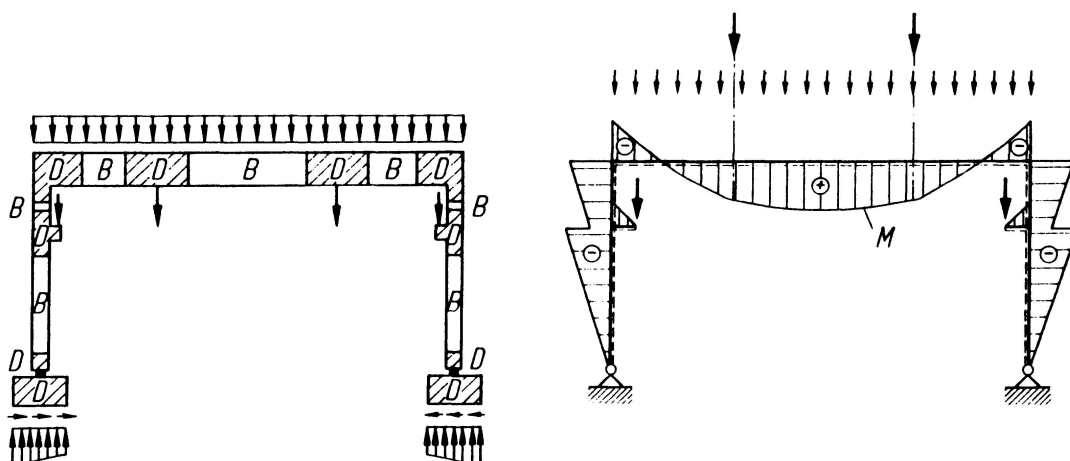
2.3 MODELOS DE BIELAS E TIRANTES E CAMPOS DE TENSÕES PARA O DIMENSIONAMENTO DE ELEMENTOS ESPECIAIS

Uma explicação detalhada das técnicas para a aplicação prática de modelos de bielas e tirantes pode ser conferida em (SCHLAICH et al., 1987), e (WIGHT; MACGREGOR, 2012). Diversos exemplos de aplicações provenientes de casos reais podem ser encontrados em (fib, 2011).

Os modelos de bielas e tirantes (MBT) são uma ferramenta para auxiliar no dimensionamento e no detalhamento de elementos de concreto armado, principalmente para problemas tratáveis como estado plano de tensões. Como no modelo de treliça, os mecanismos internos de transferência de cargas são representados num MBT por barras discretas de tração ou compressão. O modelo de barras rotuladas é uma representação conceitual, podendo ser hipostático, mas as forças nas barras devem estar em equilíbrio com as cargas externas.

O uso de modelos de bielas e tirantes é apropriado para regiões de uma estrutura que não tenham um procedimento de dimensionamento padrão, por apresentarem campos de deformações não lineares nas seções, aos quais não se aplica a hipótese de Euler-Bernoulli das seções planas. Estas regiões de descontinuidade, caracterizadas por variações abruptas na geometria ou carregamento, são chamadas de “regiões D”. As regiões que funcionam predominantemente sob flexão e às quais a hipótese de Euler-Bernoulli é aplicável são denominadas “regiões B”, e seu dimensionamento é baseado nas expressões baseadas no campo de tensões associado ao modelo de treliça. A Figura 28 ilustra a divisão entre regiões B e D de um pórtico. Um elemento estrutural inteiro pode também ser considerado uma grande região “D”.

Figura 28 – Regiões B e D, sistema estático e diagrama de momentos fletores para um pórtico de concreto armado



(fonte: Schlaich (1991))

Para a criação de um modelo de bielas e tirantes, pode-se partir do diagrama de corpo livre da região D, e utilizar os esforços calculados nas seções pela análise do modelo de elementos 1D como as cargas externas que devem ser equilibradas. O traçado do modelo é guiado pela busca da representação da transferência das cargas nas fronteiras da região D por um sistema de barras rotuladas em equilíbrio com o carregamento externo. A força nas barras tracionadas (tirantes) serve como base para o dimensionamento das armaduras, portanto deve-se privilegiar modelos com tirantes verticais ou horizontais, sendo que as bielas podem assumir, a princípio, qualquer ângulo.

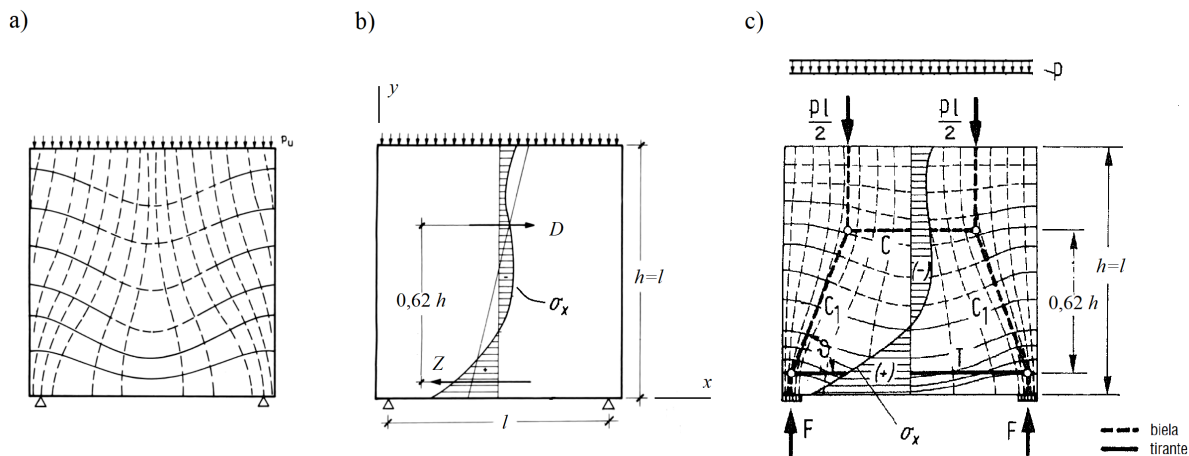
O traçado das bielas e tirantes pode ser baseada na consideração qualitativa do “caminho das forças”, i.e. as trajetórias de tensões principais que se espera que ocorram na estrutura para transferir as forças de uma seção para outra. Alternativamente, uma análise linear elástica pelo método dos elementos finitos pode ser realizada a fim de obter as trajetórias das tensões principais, que servirão de base para orientar as barras do modelo .

Ao propor um modelo de bielas e tirantes em um projeto, é preciso ter em mente que as “bielas comprimidas” e “tirantes tracionados” representam resultantes de campos de compressão e campos de tração estaticamente admissíveis no concreto, da mesma forma que a treliça discreta tem relação com o campo de tensões descontínuo (Figura 27). Se a prioridade é aproveitar a máxima capacidade de carga, esse campo de tensões deve refletir a configuração dos esforços internos *na ruptura*, ou seja, após a redistribuição de tensões causada pela fissuração. O exemplo a seguir ilustra a criação do MBT e as implicações de um modelo baseado nos campo de tensões elástico do concreto não-fissurado.

O campo de tensões elástico de uma placa quadrada carregada no plano está apresentado na Figura 29-a. A partir da curva de intensidade das tensões normais ao longo da seção média (Figura 29-b) pode-se calcular a resultantes das tensões de compressão (D) e de tração (Z), e suas posições no centro de gravidade dos diagramas. A partir dessas informações sobre o campo de

Figura 29 – Placa de concreto armado:

- a) trajetórias de tensões principais elásticas de tração (linha cheia) e compressão (tracejado);
- b) intensidade das tensões normais ao longo da altura na seção média e suas resultantes;
- c) modelo de bielas e tirantes gerado a partir das resultantes das tensões normais e condições de contorno



(fonte: adaptado de Leonhardt e Mönnig (1977) e Schlaich et al. (1987))

tensões, o modelo de bielas e tirantes da Figura 29-c pode ser traçado, lembrando que “as bielas e tirantes condensam os campos de tensão reais em linhas retas resultantes e concentram sua curvatura em nós” (SCHLAICH et al., 1987). Não existe um procedimento único, exato, para a criação do modelo, mas a ideia é representar a transmissão dos esforços internos de uma maneira razoável, visando gerar um detalhamento executável e que não exija muito da capacidade de redistribuição do elemento, que acontecerá à custa de fissuração e deformações permanentes.

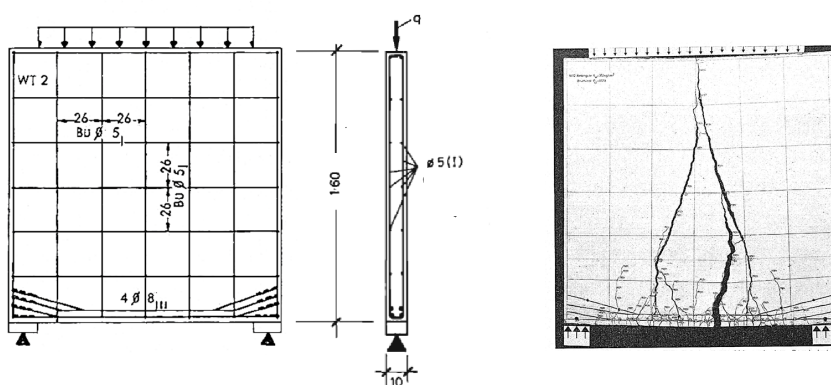
Na Figura 29-c, as bielas de compressão verticais são inseridas para “transmitir” as resultantes das forças aplicadas $Pl/2$ aos apoios. A inclinação de uma biela inserida em uma zona do elemento é definida vagamente pela direção média das tensões principais de compressão naquela zona, representada pelas bielas inclinadas. As bielas são unidas por um “nó” no ângulo, que representa a região onde o campo de compressão se curva. Para equilibrar as bielas de compressão inclinadas, uma biela horizontal de compressão e um tirante tracionado são inseridos nas posições correspondentes às resultantes de tensões normais horizontais da Figura 29-b.

Após o traçado, as forças nas barras do modelo podem ser calculadas pelo equilíbrio com as cargas externas. A força T no tirante fornece a força de tração que o feixe de armaduras deve suportar, e é usada para o dimensionamento da área necessária de armadura $A_s = T/f_{yd}$. A posição e a inclinação do tirante determinarão a configuração das barras no projeto a executar. Detalhes devem ser observados para assegurar a ancoragem e uma armadura mínima distribuída deve ser prevista para garantir a ductilidade do elemento e evitar problemas com fissuras de retração.

Uma avaliação das *tensões* de compressão representadas pelas bielas de concreto não é possível, a menos que as bielas discretas sejam substituídas por campos de tensões estaticamente equivalentes.

No entanto, os nós são gargalos dos campos de tensões com geometria definida pelo tamanho dos suportes e espessura da peça, portanto verificar o nível de compressão nestas regiões (e.g. cálculo da pressão nos apoios) é o suficiente, em geral, para garantir que a região da biela esteja sob níveis de compressão aceitáveis. As pressões calculadas devem ser comparadas com o valor efetivo f_{ce} de resistência, especificado em normas para cada tipo de zona e condições de fissuração esperadas.

Figura 30 – Desenho da armadura e foto da placa de concreto armado na ruptura.
Dimensões em cm.



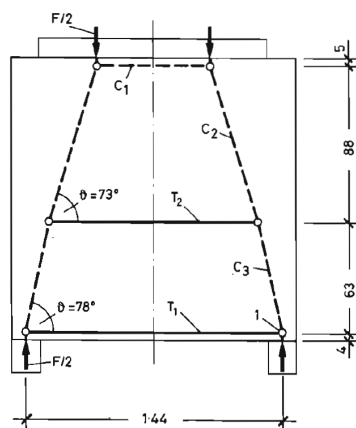
(fonte: adaptado de Walther (1967))

A Figura 30 mostra o resultado de um ensaio à ruptura realizado com uma placa quadrada de concreto armado cujo detalhamento da armadura está ilustrado à esquerda. A ruptura, atingida sob uma carga total $F = 119,5$ tf, ocorreu com o escoamento da armadura longitudinal. Se o modelo de bielas e tirantes apresentado na Figura 29, baseado na distribuição de tensões elástica, for usado para verificar capacidade de carga da placa na Figura 30, resulta $F = 47,6$ tf, apenas 40% da carga de ruptura medida no ensaio (SCHLAICH, 1991). A razão para isso é que a distribuição de tensões na ruptura difere substancialmente da solução elástica, e portanto o modelo baseado nesta não captura toda a capacidade de carga disponível da estrutura.

Através de uma modificação do MBT, Schlaich (1991) demonstra que é possível obter uma aproximação melhor para a capacidade de resistência medida no ensaio da placa da Figura 30. Ignorando a distribuição elástica de tensões, ajustando o MBT ao modo de ruptura e incluindo um tirante adicional que leve em conta a contribuição à resistência da armadura distribuída, resulta o modelo ilustrado na Figura 31. A capacidade de carga calculado por meio deste modelo é igual a 94% da capacidade medida no ensaio, o que indica que este modelo representa melhor o estado de tensões na ruptura. A boa aproximação, partindo de um modelo tão simples demonstra a utilidade prática dos modelos de bielas e tirantes.

Apesar de o modelo de bielas e tirantes baseado nas tensões elásticas não gerar uma boa aproximação para a capacidade da estrutura real, levando a um dimensionamento com excesso de aço, os MBTs baseados em tensões elásticas visam um dimensionamento com bom desempenho para o estado limite de serviço de fissuração, já que as primeiras fissuras surgem nas regiões

Figura 31 – MBT ajustado para estimar a capacidade da estrutura: aumento do braço de alavanca pela elevação da biela C_2 e inclusão do tirante T_2 para a levar em conta a contribuição da armadura distribuída $\varnothing 5$ C/26



(fonte: Schlaich (1991))

do concreto tracionadas segundo a solução elástica. Além disso, justamente por não levar a um dimensionamento extremo, baseado na ruptura, sabe-se que reservas de resistência estarão disponíveis para a estrutura real. Portanto a margem de segurança resultante, apesar de não ser calculada explicitamente, será relativamente grande, o que é uma característica desejável para regiões críticas como as conexões entre membros, contribuindo para a robustez estrutural.

Um projeto baseado em um MBT correspondente a uma distribuição de tensões na ruptura, que procura aproveitar a capacidade máxima da estrutura, como no caso da Figura 31, exige maior capacidade de deformação da estrutura. Este tipo de modelo é adequado para a verificação da capacidade máxima de estruturas existentes, para decidir sobre a necessidade de reforço estrutural, por exemplo. No entanto, em diversas situações práticas de dimensionamento não há necessidade de buscar a solução de maior capacidade de carga, mas apenas garantir um detalhamento racional e seguro que tenha desempenho satisfatório em serviço. Ou seja, a solução correspondente ao campo de tensões “na ruptura” não é a prioridade nos casos de dimensionamento onde o elemento em questão não se repete muitas vezes na estrutura, e portanto não faz diferença com relação à economia de aço.

2.3.1 Modelos de campos de tensões descontínuos

Para que o teorema estático da análise limite (subseção 1.4.4) possa ser aplicado, fornecendo um limite inferior para a carga de ruptura, o estado de tensões $\underline{\sigma}$ do campo estaticamente admissível deve ser explicitamente especificado em cada ponto \vec{x} do corpo. No modelo de bielas e tirantes discreto, onde as barras representam resultantes ao longo de regiões do elemento, a descrição do estado de tensões é incompleta, e o teorema estático não é aplicável. Não é possível afirmar que um MBT discreto fornece um limite inferior para a carga de ruptura.

A validação de um modelo de bielas e tirantes para o teorema estático da análise limite pode ser

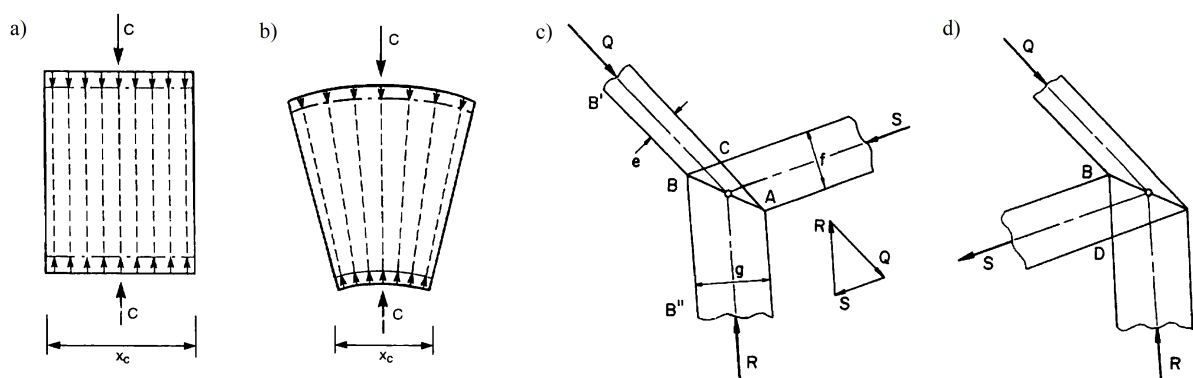
procurada através da substituição das bielas e tirantes discretos de concreto armado por campos de tensões estaticamente equivalentes. A possibilidade de admitir descontinuidades no campos de tensões, conforme a subseção 1.4.2, é útil para a definição dos tipos básicos de campos de tensões descontínuos que podem ser utilizados na modelagem de elementos estruturais. Conforme as seguintes recomendações, um modelo de bielas e tirantes sempre pode ser transformado em um modelo de campos de tensões descontínuo:

- Uma biela sob a força de compressão C representa a resultante de um campo de compressão prismático (Figura 32-a) (e.g. o banzo comprimido ou as diagonais comprimidas na alma de uma viga no modelo de treliça) ou de um campo de tensões em leque (Figura 32-b).
- Um tirante é a resultante de uma camada de barras de armadura ou um cabo de protensão.
- Um nó é um volume confinado de concreto, onde as bielas se intersectam (Figura 32-c) ou são desviadas por um tirante (Figura 32-d).

É importante ressaltar que as duas classes de campos de compressão descontínuos, barra e leque, são matematicamente bem definidos e satisfazem a condição de equilíbrio local $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = 0$ (NIELSEN; HOANG, 2011, p.286). Os dois tipos de campos são suficientes para a modelagem de um grande número de situações, mas qualquer campo de tensões que satisfaça o equilíbrio local pode ser utilizado. Para uma biela há infinitos campos de tensões estaticamente admissíveis, portanto a partir de um MBT podem ser gerados diversos modelos de campos de tensões descontínuos.

Figura 32 – Campos de tensões planos estaticamente equivalentes aos elementos do MBT:

a) campo de tensões prismático uniaxial; b) campo de compressão em leque (radial); c) nó ABC definido pela interseção de três bielas em equilíbrio; d) nó ABD definido por duas bielas e um tirante: a armadura age desviando esforços de compressão

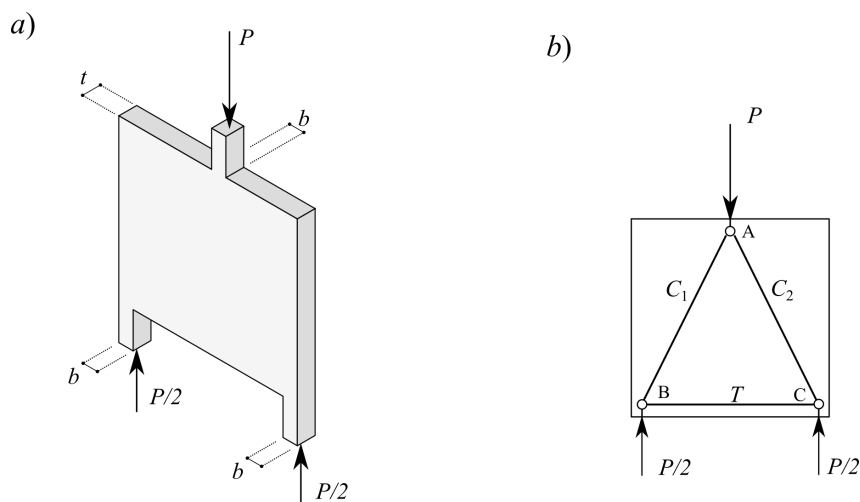


(fonte: adaptado de (CHEN, 1975))

O exemplo a seguir ilustra a expansão de um MBT simples em um modelo de campo de tensões descontínuo de forma qualitativa. A Figura 33-a ilustra uma parede de concreto armado apoiada

em duas colunas, sob uma carga concentrada P . No modelo de bielas e tirantes (Figura 33-b), onde a transmissão da carga P aos suportes foi representada diretamente, as bielas e tirantes são as resultantes dos esforços internos.

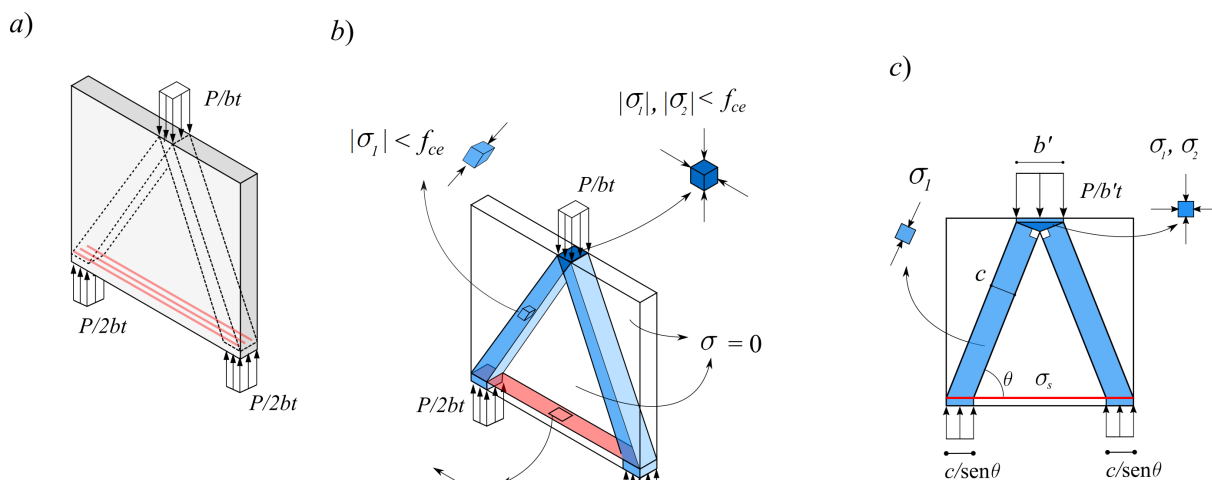
Figura 33 – a) Parede de concreto sob carga concentrada; b) modelo de bielas e tirantes



(fonte: elaborado pelo autor)

A Figura 34-a ilustra a transmissão dos esforços internos através da estrutura: as tensões de compressão são transmitidas aos apoios, e equilibradas pelo feixe de armaduras. Adotando uma representação dos esforços internos com campos de tensões descontínuos Figura 34-b, pode-se definir o estado de tensões para todos os pontos da estrutura.

Figura 34 – a) regiões possivelmente ativadas para transmissão de esforços internos; b) representação em campos de tensões descontínuos; c) modelo de campos de tensões equivalente ao MBT



(fonte: elaborado pelo autor)

As bielas discretas C_1 e C_2 do MBT são substituídas por campos de tensões de compressão uniaxiais que, por simplicidade, também serão denominados de bielas. “A verificação da resistência das bielas se dá pela verificação da tensão máxima de compressão de projeto $\sigma_{c,max,d}$ ”. O uso do valor efetivo f_{ce} para a resistência à compressão leva em conta o efeito do estado esperado de deformações transversais que reduz a resistência à compressão através da fissuração. Uma orientação quanto ao valor apropriado para a biela de cada tipo de zona pode ser encontrado nas normas ou na literatura técnica (Figura 17).

$$|\sigma_{c,max,d}| \leq f_{ce,d}, \quad \text{onde } f_{ce,d} = \frac{f_{ce}}{\gamma_c} \quad (2.8)$$

Para um cálculo da capacidade da estrutura o campo uniaxial equivalente à uma biela sob compressão C_d calculada a partir da carga de projeto P_d , pode ser definido no limite de resistência definindo a sua largura como $c = C_d/tf_{ce,d}$, onde t é a espessura da placa. Uma biela com largura menor que c é impossível para a mesma largura de placa sem violar o critério de resistência, e uma biela mais larga do que c tem tensão inferior a $f_{ce,d}$.

A carga concentrada P pode ser considerada distribuída ao longo da largura $b' = P/f_{ce}t$ de modo a definir uma região de triangular com lados a 90° ao eixo das bielas. Pode-se mostrar que em uma região triangular delimitada por campos uniaxiais uniformes cuja tensão de compressão é $-f_{ce}$, o estado de tensões é biaxial e hidrostático plano com tensões principais $\sigma_1 = \sigma_2 = -f_{ce}$ (MUTTONI et al., 1997, p.21). Nós não hidrostáticos também podem ser utilizados, limitando a tensão principal máxima a f_{ce} .

O feixe de armaduras está disposto em uma camada única, de modo que o tirante T na (Figura 34) continua representado por uma linha reta, que absorve as componentes horizontais da biela (Figura 35-a,b,c). O comprimento imerso na zona comprimida entre a biela e o apoio deve ser verificado para garantir a ancoragem. O critério de resistência para os tirantes é dado sobre a tensão de tração $\sigma_{s,d}$ nas armaduras:

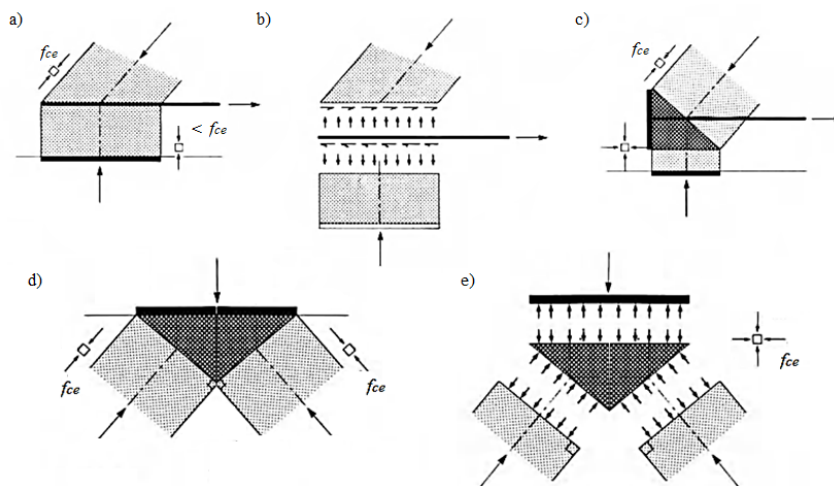
$$\sigma_{s,d} \leq f_{y,d} = \frac{f_{y,k}}{\gamma_s}, \quad (2.9)$$

onde $f_{y,d}$ é a tensão de escoamento de projeto das armaduras. Para o dimensionamento a área A_s do feixe de armaduras é dada, assim, por $A_s = T_d/f_{y,d}$, onde T_d é o valor de tração calculado a partir da carga de projeto P_d .

Fora dos campos de tensões definidos, as tensões são tomadas como nulas. Dessa forma o estado de tensões está completamente especificado para todos os pontos da estrutura e a resistência e equilíbrio são comprovados para todos os pontos do elemento, portanto a carga de projeto é um limite inferior para a carga de ruptura. É com este tipo de refinamento que um modelo de bielas e tirantes pode ser considerado como válido para comprovar a segurança de um dimensionamento pelo teorema estático.

A aplicação de campos de tensões descontínuos para o dimensionamento ou verificação de elementos de concreto armado pode ser usada como ferramenta auxiliar ao método das bielas

Figura 35 – Na construção do campo de tensões, o equilíbrio das componentes deve ser respeitado: a) detalhe da região de encontro da biela com o apoio; b) componentes de tensão horizontais são transmitidas para a armadura: o comprimento imerso na zona comprimida deve ser no mínimo igual ao comprimento de ancoragem l_b ; c) opção de ancoragem através de uma placa, definindo um nó. d) detalhe de uma região de introdução da carga concentrada; e) equilíbrio das componentes de tensão no nó.



(fonte: adaptado de Muttoni et al. (1997))

e tirantes. No entanto a construção dos campos torna-se difícil para aplicação manual em geometrias complexas, mas soluções para diversos casos clássicos estão disponíveis na literatura ((NIELSEN; HOANG, 2011), (MUTTONI et al., 1997), (MARTI, 1985), (CHEN, 1988)) e podem ser adaptadas para a verificação de zonas críticas de compressão e de ancoragem.

2.3.2 Crítica da abordagem de dimensionamento com modelos de campos de tensões descontínuos; limitações

Os campos de tensões descontínuos são uma forte idealização dos campos de tensões contínuos que ocorrem na estrutura real, mas ainda assim são capazes de representar uma parte significativa das informações relativas ao equilíbrios das forças internas. A aplicação do teorema estático da análise limite, além disso, não exige que uma solução seja próxima do estado real de colapso, embora seja verdade que quanto melhor o campo de tensões aproximar a configuração de colapso, como visto na seção anterior, melhor será a aproximação para carga de ruptura.

A abordagem estática da análise limite fornece um limite inferior teórico para a carga de ruptura real da estrutura. A confiabilidade do cálculo está subordinada à escolha apropriada do critério de resistência definido para os materiais. O principal problema da modelagem com modelos de bielas e tirantes ou campos de tensões descontínuos é a ausência da definição de um critério multiaxial para o concreto.

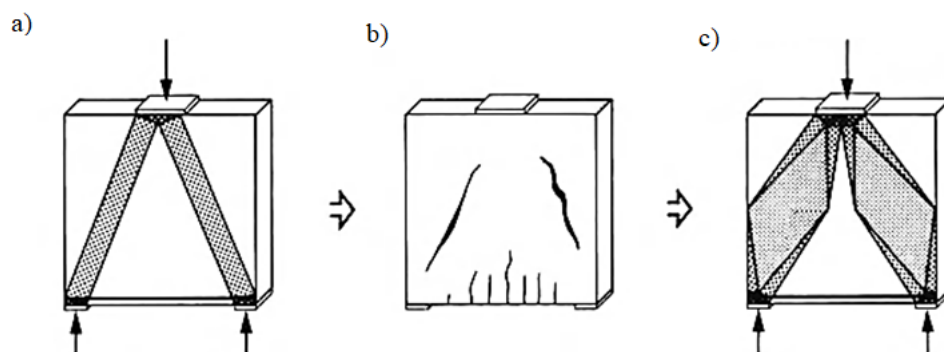
O critério de resistência do concreto é definido por meio do único parâmetro $f_{ce} = k_c f_{cd}$. A escolha do fator de redução k_c (Figura 17) é um tanto subjetiva e depende, em parte, da

intuição do engenheiro e de sua capacidade em identificar possíveis estados de deformação transversais impostas às zonas da estrutura. A utilização dos valores efetivos procura gerar resultados conservadores.

A aplicação de métodos baseados em campos de tensões descontínuos estaticamente admissíveis requer o desenvolvimento da experiência pelo estudo de soluções conhecidas e comprovadas experimentalmente. O lugar de tais métodos no repertório de cálculo do profissional de estruturas tem uma função complementar, ajudando a aperfeiçoar a avaliação intuitiva do detalhamento de estruturas, às vezes chamada de “julgamento de engenharia”.

Por outro lado, programas de computador para detalhamento de armaduras ativas e passivas em regiões complexas que baseiam-se no método estático estão sendo desenvolvidos e trazidos ao mercado com interfaces cada vez mais intuitivas, e têm potencial para se estabelecer como novos paradigmas. O conhecimento das hipóteses e limitações da teoria subjacente para o uso racional desses programas de computador pode ser adquirido através do estudo da análise limite e a implementação manual de métodos de bielas e tirantes e campos de tensões descontínuos.

Figura 36 – a) modelo de campo de tensões inicial; b) padrão de fissuração esperado sob altos níveis de compressão; c) modelo refinado para dimensionamento, prevê o uso de barras transversais para equilíbrio dos campos em leque.



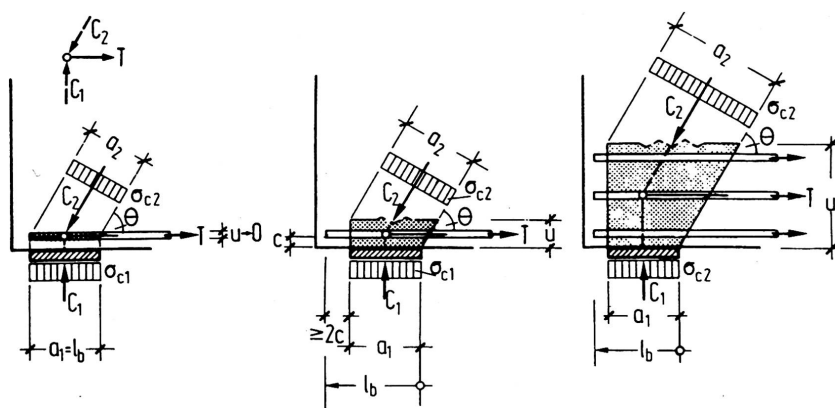
(fonte: adaptado de Muttoni et al. (1997))

Para que a estrutura possa desenvolver a resistência calculada no modelo é importante garantir a ductilidade pela observações de limites máximos e mínimos para as taxas de armadura. Além disso é importante ter em mente que sob altos níveis de compressão as regiões do concreto, podem desenvolver tensões transversais, impedindo a estrutura de atingir o estado de tensões assumido. A fim de evitar este problema, Muttoni et al. (1997, p.105) sugere um procedimento para o desenvolvimento de campos de tensões guiado pela avaliação do padrão de fissuração esperado, como ilustrado na Figura 36: os campos uniaxiais são substituídos por uma combinação de campos em leque cujo equilíbrio exige o uso de armadura no sentido horizontal.

2.3.3 Interação de campos de compressão com opções de ancoragem

Caso a armadura seja distribuída em mais de uma camada (Figura 37), ou conforme a relação entre o comprimento de ancoragem l_b das barras e a largura a_1 do apoio, pode-se assumir que os tirantes atuam ao longo de uma altura u , o que afeta a largura a_2 da biela que chega no apoio. Definições precisas da geometria de nós em regiões de ancoragem e as relações com o comprimento de ancoragem para o detalhamento podem ser encontrada em normas para cálculo de estruturas de concreto armado como a estadunidense ACI-318-19 (American Concrete Institute, 2019) ou o código europeu Eurocode 2 (European Committee for Standardization, 2005)).

Figura 37 – O número de camadas da armadura e o detalhamento da ancoragem impactam na largura e, portanto, na tensão da biela de compressão que chega no apoio com a força C_2



(fonte: (SCHLAICH et al., 1987))

2.4 MÉTODOS DO TIPO ESTÁTICO E CRITÉRIO PARA O DIMENSIONAMENTO DE LAJES

No dimensionamento de lajes planas comuns de concreto armado, os métodos empregados para o cálculo dos momentos fletores variam bastante. O que é ensinado em cada escola de engenharia varia e o que é empregado por cada profissional também, devido à grande variedade de métodos que foram desenvolvidos e empregados ao longo das gerações. Entre os métodos utilizados estão modelos elásticos de grelha ou de elementos finitos, que permitem a modelagem da rigidez das vigas de apoio, como também tabelas baseadas em soluções elásticas (tabelas de Czerny, Marcus, Stiglat-Wippel, Rüsch, etc), e expressões baseadas no método cinemático das charneiras.

Para o cálculo das solicitações, os problemas de dimensionamento que ocorrem na prática são lajes com geometrias incomuns (triangulares, trapezoidais, em forma de L) com diversas condições de apoio possíveis, e casos de descontinuidade na geometria, como aberturas e recortes de diversos tamanhos que requerem detalhamento especial.

Do ponto de vista estrutural, lajes de concreto armado oferecem uma flexibilidade relativamente grande sobre o controle da transferência das cargas através da escolha do arranjo das armaduras. Apesar desta liberdade, é preciso garantir um embasamento físico para a segurança do dimensionamento, e ao mesmo tempo evitar o consumo exagerado de aço para armaduras. Esta seção apresenta alguns métodos, fundamentados na análise limite, que podem auxiliar na análise e dimensionamento para diversos casos.

As lajes são elementos planos carregadas na direção perpendicular ao plano, sujeitas a esforços de membrana n , esforços cortantes v e momentos fletores e torsores m . Para a maior parte dos casos usuais, a influência de n e v é desconsiderada, e o dimensionamento é baseado sobre os momentos.

O equilíbrio de uma laje sob carregamento uniforme q é expresso em um sistema de coordenadas x, y ortogonais pela equação

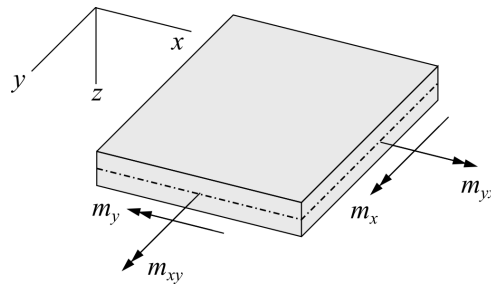
$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -q, \quad (2.10)$$

onde m_x e m_y são os momentos fletores que atuam nas seções normais a x e y associados às tensões normais aos eixos σ_{xx} e σ_{yy} , respectivamente. o momento torsor $m_{xy} = m_{yx}$ é resultante das tensões tangenciais σ_{xy} (figura 38),

$$m_x = - \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx} dz, \quad m_y = - \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{yy} dz, \quad m_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy} dz. \quad (2.11)$$

onde h é a altura (espessura) da laje. Os campos de momentos em lajes podem ser expresso em

Figura 38 – Notação para os momentos atuantes em uma laje



(fonte: elaborado pelo autor)

termos de *momentos principais* m_1 e m_2 segundo direções principais. Isto é, para cada ponto há um sistema de eixos r, s alinhado às direções principais, para o qual $m_{rs} = 0$ e a laje está em flexão pura. Portanto a tração gerada nas armaduras de um arranjo ortogonal por um momento torsor m_{xy} decompõe-se em componentes F_x e F_y .

Para lajes de concreto armado, é usual desconsiderar o momento m_{xy} para a maior parte dos casos práticos. A soma dos termos na Equação 2.10 mostra que se m_{xy} for desprezado, o equilíbrio exige um aumento em m_x e m_y . Neste caso a capacidade de carga da laje será subestimada, levando a um dimensionamento a favor da segurança.

É importante ressaltar que isto é diferente de dimensionar a armadura com base em uma solução obtida de análise pelo método dos elementos finitos ou modelo de grelha no qual $m_{xy} \neq 0$, ignorando a existência de m_{xy} na solução e levando em conta somente m_x e m_y . Esta prática superestima a capacidade de carga da laje. Uma discussão completa sobre casos em que o campo m_{xy} é relevante pode ser encontrada em (ACI Committee 447, 2018).

A abordagem estática da análise limite em lajes de concreto armado consiste em encontrar um campo de momentos $m_{(x,y,xy)}$ para toda a laje, tal que

- o campo de momentos seja estaticamente admissível com o carregamento, i.e. satisfaz a equação de equilíbrio 2.10 e respeita as condições de contorno para todos os pontos;
- o critério de resistência não seja violado em nenhum ponto da placa.

Um dimensionamento baseado em uma distribuição de momentos cumprindo essas condições tem a segurança garantida pelo teorema estático. Existem infinitas distribuições de momentos que podem cumprir estas condições. Quanto mais alta a capacidade de carga resultante, mais perto se está da solução real. A solução elástica obtida, por exemplo, de uma análise por elementos finitos é uma destas distribuições válidas pelo teorema estático, já que fornece um campo estaticamente admissível, desde que respeite o critério de resistência. Para uma distribuição de momentos que difere da solução elástica, deve ocorrer redistribuição de momentos para que a capacidade de carga prevista seja atingida. Portanto, a ductilidade das seções da laje deve ser assegurada através da mesma observação das limitações para a altura da linha neutra que valem para vigas.

A busca por distribuições de momentos para lajes pode ser auxiliada dividindo parcelas de q na Equação 2.10 entre cada termo, o que equivale a considerar que cada parcela da carga é sustentada por uma combinação específica de momentos fletores nas duas direções e momentos torsores. Isto é empregado no método das tiras (subseção 2.4.1), onde assume-se de antemão que $m_{xy} = 0$, o que é compensado pelo aumento em m_x e m_y e permite que estes esforços sejam desacoplados.

As lajes retangulares são geralmente dimensionadas com armaduras ortogonais com taxas diferentes nas duas direções, gerando uma laje ortotrópica com resistências à flexão dados pelos momentos últimos m_{xu} e m_{yu} , que devem resistir aos momentos solicitantes m_x , m_y .

2.4.1 Método das tiras simples (simple strip method)

O método das tiras simples de Hillerborg (HILLERBORG, 1975) se aplica a lajes apoiadas ao longo de bordas, i.e. lajes contínuas ou não, apoiadas sobre vigas ou paredes; não se aplica a lajes submetidas a cargas concentradas e lajes apoiadas sobre colunas, para o qual no entanto existe a extensão denominada de “método das tiras avançado”. A dedução segue a partir da equação 2.10,

adotando o momento torsor em relação à direção das armaduras m_{xy} igual a zero:

$$m_{xy} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q. \quad (2.12)$$

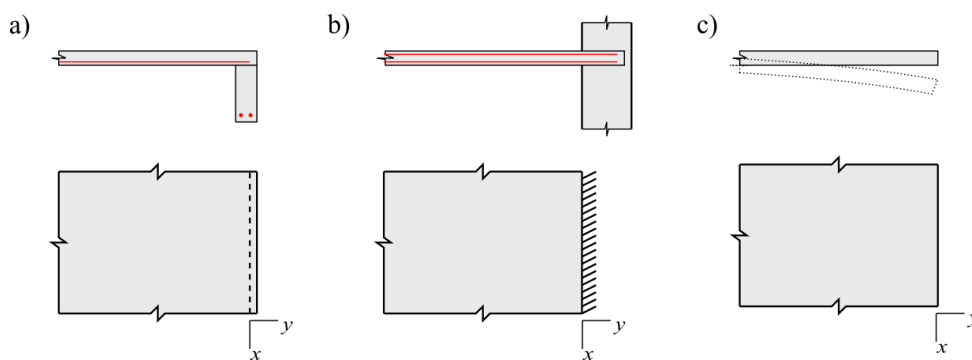
Com isto a transmissão de esforços da laje torna-se, matematicamente, independente nas duas direções, como se a laje fosse formada por tiras perpendiculares independentes, que trabalham sob flexão pura. A carga q pode ser considerada como composta de duas parcelas que são suportadas pelas tiras de cada direção de forma independente para diferentes regiões da laje: $q = q_x + q_y$. A Equação 2.12 divide-se, então, em duas equações, com a mesma forma da equação para uma viga em flexão, para cada direção:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -q_x, \quad \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q_y. \quad (2.13)$$

As equações 2.13, junto com as condições de contorno (Figura 39)), são utilizadas para calcular os momentos solicitantes para o dimensionamento das taxas de armadura em cada direção.

Figura 39 – Condições de apoio e representação no desenho em planta:

- a) apoio simples: para bordos sem continuidade, apoiados sobre viga ou parede ($m_x = 0$)
- b) engaste: quando além do deslocamento, a rotação é impedida, como para um bordo monolítico com um elemento rígido como uma cortina espessa de concreto, ou para a região do apoio em laje contínua;
- c) bordo livre ($m_x = 0$ e $\frac{\partial m_x}{\partial x} = 0$)



(fonte: elaborado pelo autor)

O método permite a escolha para a distribuição lateral dos momentos mas que, como já observado, quanto mais diferir da solução elástica, mais exigirá da capacidade de redistribuição de esforços da laje, o que acontece pela formação de fissuras cujo tamanho de abertura pode se tornar inaceitável sob combinações de cargas de serviço. Além da redistribuição lateral controlada pela repartição de $-q$, é possível aplicar a redistribuição para controle entre o momento positivo no vão e o momento negativo sobre os apoios, como descrito para o caso de vigas contínuas na subseção 2.2.1.

Do ponto de vista da abordagem estática da análise limite, a equação de equilíbrio original da Equação 2.10 foi simplificada para a nova condição de equilíbrio da Equação 2.13 pela restrição

dos campos de momentos aos do tipo $m_{xy} = 0 \forall x, y$. Calcular os momentos para cada tira a partir da escolha para a distribuição de q e das condições de apoio garante que a solução é estaticamente admissível.

Como os esforços nas duas direções se tornam desacoplados, o critério de resistência pode ser simplificado. Para garantir a validade do critério de resistência basta dimensionar as seções a partir das solicitações m_x, m_y . Isto é os momentos fletores últimos positivos e negativos de projeto $m_{xu}^+, m_{yu}^+, m_{xu}^-, m_{yu}^-$ para o dimensionamento das seções obedecem ao critério de resistência para toda a laje:

$$m_{xu,d}^- \leq m_{x,d}(x) \leq m_{xu,d}^+ \quad \forall x, \quad m_{yu,d}^- \leq m_{y,d}(y) \leq m_{yu,d}^+ \quad \forall y, \quad (2.14)$$

onde o subscrito d indica valores de projeto. Dimensionar as seções de acordo com os momentos solicitantes e o critério acima garante que a carga última de projeto $q_{u,d}$ é um limite inferior para a carga de ruptura q_u pelo teorema estático, i.e. garante a base física da segurança do dimensionamento.

Os campos de momento obtidos através deste procedimento variam, em geral, em todas as direções. Como aponta Hillerborg (1975, p.11), armar uma laje com base no campo de momentos variável requer que o espaçamento varie continuamente ao longo de toda laje, o que é impraticável na construção. O dimensionamento deve gerar um arranjo em que o espaçamento é constante sobre grandes áreas. A validade do teorema estático exige que o valor máximo em cada área seja empregado para dimensionar as seções. No entanto a segurança torna-se excessiva e o projeto anti-econômico.

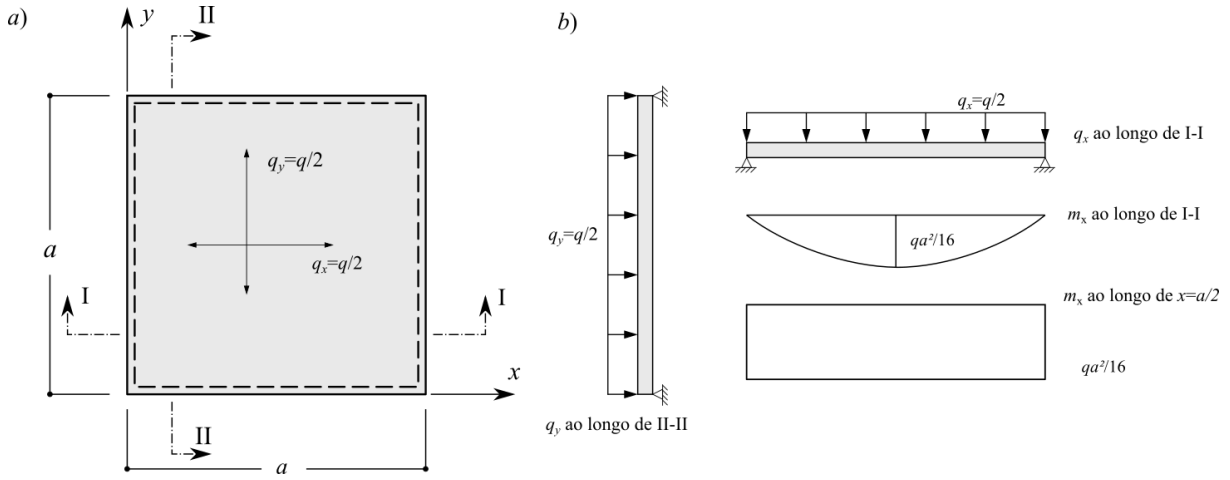
Uma alternativa, de acordo com Hillerborg (1975, p.12) é dimensionar a armadura para o momento médio calculado ao longo de uma certa largura (perpendicular às barras). Neste caso a condição de resistência da Equação 2.14 não é respeitado, e a segurança do dimensionamento não é garantida pelo teorema estático. No entanto, em geral, a capacidade de redistribuição de lajes usuais é tão grande, e os procedimentos do método das tiras são tão “do lado da segurança” (quando comparados, por exemplo, ao uso do método das charneiras) que o uso dos valores médios sobre áreas para o projeto é justificado.

A aplicação do método e as possibilidades para o cálculo e projeto de lajes será ilustrada aqui através de três exemplos introduzidos por Hillerborg (1975, p.14). O momento último para o dimensionamento de uma laje quadrada de lado a , simplesmente apoiada nos quatro bordos, sob carga uniforme q deve ser calculado.

Distribuindo a metade da carga q para cada direção (Figura 40-a), resulta a distribuição de momentos ilustrada na Figura 40-b, que dá $m_x = m_y = qa^2/(2 \times 8) = 0,0625qa^2$.

O método cinemático das charneiras plásticas fornece valores para o momento último, tomado como constante em toda a laje, que serão utilizados como referência. Com o mecanismo com linhas de ruptura em X, ilustrado na Figura 41-a, resulta $m_1^s = 0,046qa^2$. Para o mecanismo

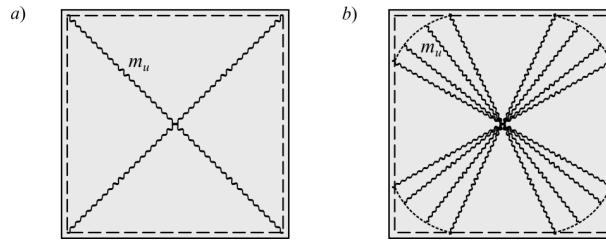
Figura 40 – a) Distribuição $q_x = q_y = q/2$. As setas indicam a direção da distribuição de cada parcela. b) momentos resultantes



(fonte: elaborado pelo autor)

mais geral da Figura 41-b (ver o Capítulo 3) pode-se chegar no valor ótimo $m_2^s = 0,0417qa^2$. Ambos os valores são limites superiores para o momento último m_u .

Figura 41 – a) mecanismo de ruptura em X; b) mecanismo de ruptura com leques nos cantos



(fonte: elaborado pelo autor)

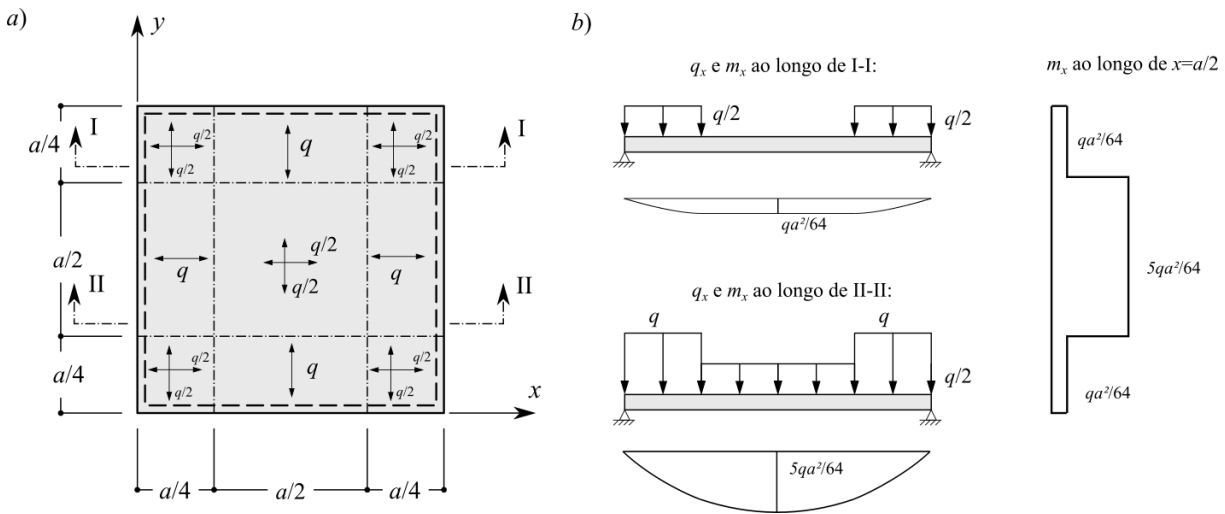
O momento *máximo* calculado pela Figura 40 é 35% maior que m_1^s (da solução adotada usualmente para armadura uniforme) portanto o consumo de aço resultante do dimensionamento baseado no valor máximo seria excessivo. Tomando o valor médio ao longo de x sobre toda a distribuição parabólica de momento da Figura 40-b, resulta $m_{med} = \frac{2}{3} \times 0,0625qa^2 = 0,0417$, mas neste caso, se o dimensionamento é feito com base na média, o teorema estático deixa de ser válido. A *média* sobre toda a laje para essa distribuição resulta no mesmo valor m_2^s calculado pelo método cinemático, mas nada, a princípio, garante que poderia ser menor do que este.

Pode-se elaborar uma solução visando uma distribuição variável de armadura por zonas, assumindo que a carga nas zonas mais próximas de um bordo apoiado seja transmitida diretamente (a 90°) para este bordo e, nos cantos, metade da carga é distribuída para cada direção (Figura 42)).

Os momentos máximos por unidade de comprimento resultantes para os dois tipo de tiras são

$$m_{xI} = \left(\frac{q}{2} \frac{a}{4}\right) \frac{a}{8} = \frac{qa^2}{64}, \quad m_{xII} = \frac{qa^2}{64} + \frac{qa^2}{2 \times 8} = \frac{5qa^2}{64}$$

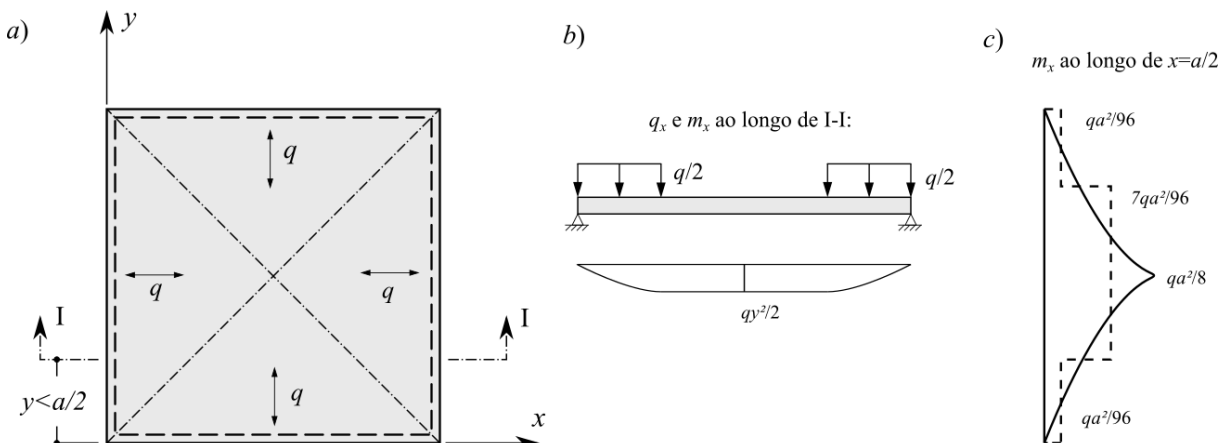
Figura 42 – a) Distribuição de cargas b) momentos resultantes



(fonte: elaborado pelo autor)

Como cada tipo de tira cobre metade da área, o consumo de aço, que é aproximadamente proporcional ao momento, pode ser avaliado pelo valor médio $m_{xmed} = 0,047qa^2$, que é muito próximo do consumo obtido pelo dimensionamento baseado no limite superior $m_1^s = 0,046qa^2$ para armadura uniforme na laje. Portanto um dimensionamento baseado na distribuição de momentos da Figura 42-b seria satisfatório do ponto de vista da economia ao mesmo tempo que teria a segurança garantida pelo teorema estático (i.e. garante-se que a carga de projeto q da laje dimensionada é um limite inferior para a carga de ruptura da laje).

Uma terceira possibilidade para a distribuição das cargas, seguindo a ideia de distribuir a carga diretamente para o suporte mais próximo na menor distância possível está ilustrada na Figura 43-a. Para uma tira em uma posição I-I a uma distância $y < \frac{a}{2}$ do eixo x o momento de projeto é

Figura 43 – a) distribuição de cargas; b) momentos resultante; c) os momentos variam ao longo de y 

(fonte: elaborado pelo autor)

$m_x = \frac{1}{2}qy^2$, como indicado nas figuras 43-b e 43-c.

Um dimensionamento estritamente baseado nesta solução exigiria que o espaçamento das barras da armadura fosse variável em ambas as direções, mais denso no centro da laje. Uma alternativa consiste em dimensionar a laje para valores médios do momento, como indicado pela linha tracejada na Figura 43-c.

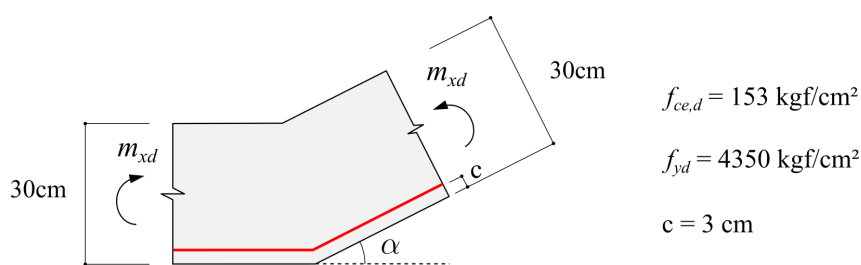
Comparado a outros métodos manuais para o cálculo de lajes, como o uso de tabelas, o cálculo das reações nos bordos é facilitado, as reações de apoio das tiras fornecem a distribuição de cargas ao longo dos elementos de apoio.

Os princípios básicos para distribuição de esforços e dimensionamento de lajes com formas mais complicadas são similares aos expostos aqui. Em uma situação prática, o projetista pode estar à procura de soluções onde um exagero de segurança seria uma prioridade, como no dimensionamento de um elemento cujo comportamento está sujeito a incertezas. Para casos ordinários, onde há grande repetição do mesmo elemento de laje dentro da estrutura, pode-se procurar uma distribuição que vise a economia de armaduras. O domínio da aplicação do método das tiras também é especialmente útil para o dimensionamento de lajes com geometrias peculiares, principalmente quando não é possível realizar uma modelagem numérica.

2.5 EXEMPLO DE APLICAÇÃO: ELEMENTO EM ÂNGULO SOB FLEXÃO PURA

Uma laje¹ com 30cm de altura tem um ângulo de 30° que deve resistir ao momento solicitante de projeto m_{xd} (momento fletor por metro tfm/m). A geometria e os dados estão ilustrados na Figura 44-a. A armadura deve ser dimensionada e detalhada na região do ângulo para duas situações: $m_{xd} = 10$ tf (o momento tende a fechar o ângulo), e $m_{xd} = -10$ tf (o momento tende a abrir o ângulo).

Figura 44 – Geometria e dados do problema. c =cobrimento.



(fonte: elaborado pelo autor)

A armadura longitudinal de elementos comuns de concreto em flexão é usualmente dimensionada através das expressões obtidas pelo equilíbrio da seção no ELU. A taxa mecânica de armadura

¹ Problema baseado no texto Aufgabensammlung Stahlbeton GZ, Marti, P., ETH Zürich.

necessária ω_{nec} de uma seção de largura b e altura útil d é calculada pela Equação 2.15:

$$\omega_{nec} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2M_d}{bd^2 f_{ce,d}}} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2m_d}{d^2 f_{ce,d}}} \quad (2.15)$$

onde $M_d/b = m_d$ é o momento por unidade de comprimento.

A armadura necessária por unidade de comprimento é obtida de

$$a_{s,nec} = \frac{\omega_{nec} d f_{ce,d}}{f_y} \quad (2.16)$$

Assumindo barras longitudinais $\varnothing 20$,

$$d = h - c - \varnothing/2 = 30 \text{ cm} - 3 \text{ cm} - 1 \text{ cm} = 26 \text{ cm} .$$

$$\omega_{nec} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2 \times 10000}{26^2 \times 153}} = 0,102$$

$$a_{s,nec} = \frac{0,102 \times 26 \times 153}{4350} \cong 0,093 \text{ cm}^2 / \text{cm} = 9,3 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

Escolha: barras de 20mm a cada 22 cm, i.e. $\varnothing 20 \text{ C}/22\text{cm}$ ($a_s = 9,1 \text{ cm}^2/\text{m}$).

Tração na armadura: $T_s = a_s f_{yd} = 9,1 \times 4350 = 40 \text{ tf/m}$ (tf por metro transversal).

Altura da zona de concreto comprimida na seção (da condição $\sum F_x = 0$, etc.):

$$z_{cc} = T_s / f_c = 400 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}} / 153 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = 2,6 \text{ cm}$$

Os esforços são conhecidos nas duas seções, e o modo de transferência das forças tem que assumir alguma configuração. Como decidir se a transferência de esforços exigirá algum detalhamento especial? Esta situação está ilustrada na Figura 45-a. As informações obtidas até aqui, somente através de procedimentos usuais para dimensionamento do concreto à flexão, sugerem a geometria de campo de tensões descontínuo ilustrado na Figura 45-b com a introdução de uma biela vertical.

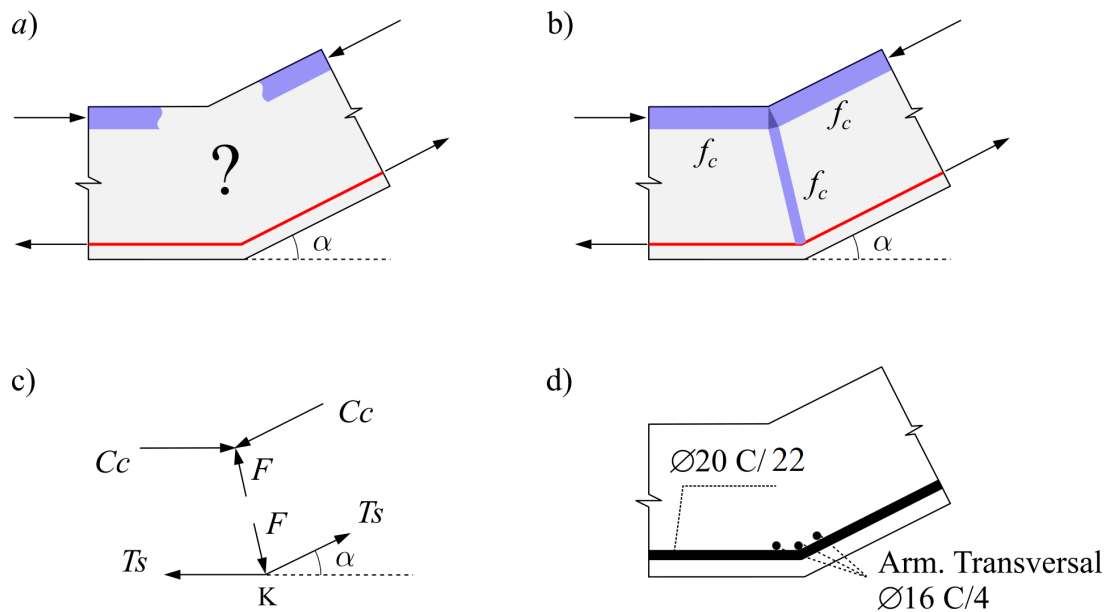
A geometria das bielas de compressão da borda comprimida definem a região nodal com tensões f_{cd} no plano. Os esforços de compressão são equilibrados pelas barras da armadura através da biela vertical. Neste caso não há necessidade de um detalhamento especial.

A força de compressão F na biela é obtida pelo diagrama de forças na Figura 45-c, e sua largura a também pode ser calculada, que deve coincidir com a largura obtida em um desenho realizado em escala:

$$F = 2T_s \sin(\alpha/2) = 64,2 \text{ tf} / \text{m} = 642 \text{ kgf} / \text{cm} \rightarrow a = F / f_{cd} = 642 / 300 = 2,14 \text{ cm} .$$

Na região inferior a biela se apóia nas barras da armadura, definido um nó do tipo CTT (compressão-tração-tração) o que exige uma escolha apropriada para a resistência efetiva $f_{ce,d}$.

Figura 45 – a) O modelo de transferência das cargas nas seções deve satisfazer o equilíbrio, respeitando as limitações de resistência dos materiais. b) modelo de campos de tensões descontínuos ou bielas e tirantes. c) Diagrama de forças resultantes. d) Detalhamento da armadura.



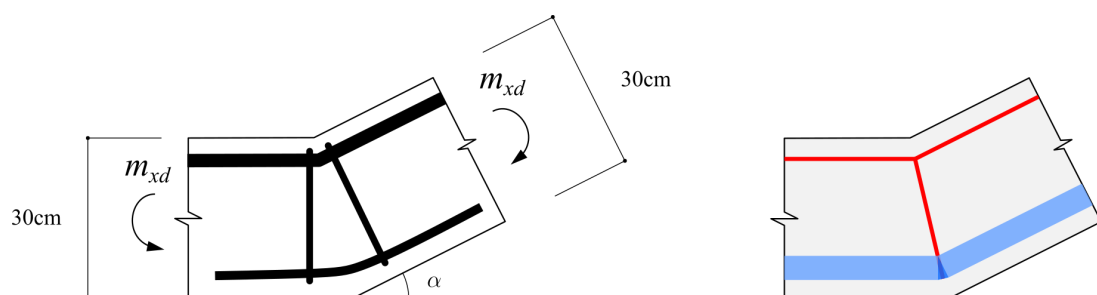
(fonte: elaborado pelo autor)

Deve-se observar certas condições sobre o raio da dobra na armadura longitudinal para que este tipo de transferência de esforços seja possível (SCHLAICH et al., 1987), (MUTTONI et al., 1997, p.63).

O detalhamento está apresentado na Figura 45-d. As barras transversais de Ø16 (diâmetro da armadura construtiva, supõe-se) são inseridas a fim de ajudar o apoio da biela vertical no sentido transversal.

Para o caso $m_{xd} = -30 \text{ tf}$, a solução é análoga. O fluxo das forças é invertido, e a transmissão dos esforços ocorre, neste caso, por tração na região da interseção em ângulo, portanto deve ser prevista armadura transversal, como ilustrado na Figura 46. O tirante vertical é introduzido no modelo é utilizado para dimensionar a área de aço do grupo de estribos.

Figura 46 – Armadura e modelo para momentos agindo no sentido de abrir o ângulo



(fonte: elaborado pelo autor)

O tirante vertical forma junto com as zonas de compressão um nó do tipo CCT e o cálculo da armadura longitudinal deve ser realizado com o valor apropriado de resistência efetiva. A formação do nó inferior de forma triangular é possibilitada pelo detalhe de ancoragem: ganchos ou cabeças chatas nas barras transversais, desde que haja espaço suficiente para construí-los, farão com que a tração nas barras atuem comprimindo a região nodal por trás.

3 MÉTODOS TRADICIONAIS ASSOCIADOS À ABORDAGEM CINEMÁTICA DA ANÁLISE LIMITE

Neste capítulo são discutidos os métodos tradicionais e aspectos do cálculo para elementos de concreto armado associados à abordagem cinemática da análise limite, baseados na consideração de campos de velocidade cinematicamente admissíveis e o teorema do trabalho virtual.

3.1 INTRODUÇÃO

Os métodos do tipo estático do capítulo 2 envolvem a consideração de um campo de tensões estaticamente admissível, que juntamente com o critério de resistência fornece um limite inferior para a carga de ruptura q_u . Em contraste, os métodos do tipo cinemático envolvem a consideração de um movimento descrito por um *campo de velocidades cinematicamente admissível*. Um movimento que introduz um grau de liberdade ao sistema, causando a perda da estabilidade, é denominado *mecanismo de ruptura*.

Para a descrição matemática do mecanismo de ruptura, pode-se admitir campos de velocidade descontínuos, juntamente com a potência de deformação associada com a formação da descontinuidade. Uma descontinuidade do campo de velocidade é um salto no campo de velocidades e serve para representar, por exemplo, o movimento de um bloco da estrutura em relação a outro ao longo de uma superfície de descontinuidade Σ . Diferentemente do caso de campos de tensões descontínuos, que são quase sempre representações extremamente simplificadas das tensões da estrutura na ruptura, as descontinuidades de velocidade com frequência aparecem no colapso de estruturas reais (CHEN, 1975, p.48).

Retomando o teorema cinemático (subseção 1.4.5), uma estrutura não é capaz de suportar um carregamento \vec{Q} se um mecanismo de colapso puder ser encontrado sob o qual a potência das forças externas P_{ext} se iguala ou excede a potência resistente máxima P_{rm} :

$$\vec{Q} \text{ é suportável} \Rightarrow \text{para qualquer } \vec{v} \text{ C.A., } P_{ext} \leq P_{rm}. \quad (3.1)$$

Portanto, considerando um mecanismo de ruptura em particular, procurar o menor valor para a carga de ruptura através da desigualdade

$$P_{ext} \leq P_{rm} \quad (3.2)$$

fornece um valor Q^s para a carga de ruptura que é maior ou igual à carga de ruptura Q_u , ou seja Q^s é um limite superior para Q_u .

A potência dos esforços externos P_{ext} de um carregamento geral \vec{Q} foi definida na subseção 1.4.3. A potência resistente máxima depende da definição do critério de resistência, pois corresponde

à potência de deformação máxima que o material da estrutura pode mobilizar, com estados de tensões limitados pelo critério de resistência $f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$. Para o caso geral de um contínuo tridimensional,

$$P_{rm} = \int_{\Omega} \pi(\underline{\underline{d}}) d\Omega + \int_{\Sigma} \pi(\vec{n}, \llbracket \vec{v} \rrbracket) d\Sigma, \quad (3.3)$$

onde a primeira integral expressa a potência associada à taxas de deformação $\underline{\underline{d}}$ e a segunda integral expressa a potência associada à formação da superfície de descontinuidade Σ no campo de velocidades \vec{v} . O salto no campo de velocidades ao longo da superfície de descontinuidade de normal \vec{n} é simbolizado por $\llbracket \vec{v} \rrbracket$. As funções de apoio π simbolizam a maior potência resistente que o campo de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$ é capaz de mobilizar dentro da limitação imposta pelo critério de resistência $f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$

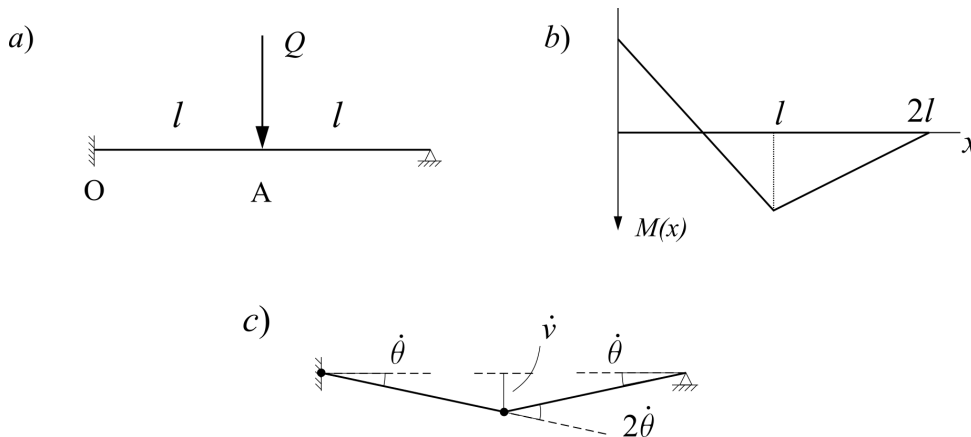
O critério de resistência define os tipos lícitos de ruptura na modelagem. Em uma análise de esforços com rótulas plásticas para cálculo de barras 1D, por exemplo, se o critério for definido somente como uma limitação sobre o momento fletor, do tipo

$$-M'_u < M(x) < M_u, \quad (3.4)$$

significa que um modo de colapso de flexão é assumido para a barra, e os mecanismos possíveis são de ruptura por flexão. Portanto é necessário garantir que a estrutura real dimensionada segundo este critério tenha resistência suficiente ao esforço cortante, permitindo que qualquer seção atinja M_u ou M'_u e a carga de ruptura seja atingida através da redistribuição de esforços. Para vigas usuais de concreto armado, garante-se a resistência ao esforço cortante através do dimensionamento de estribos segundo as expressões discutidas na subseção 2.2.3.

O exemplo simples a seguir ilustra uma aplicação do método cinemático para o cálculo de uma viga engastada-apoiada de comprimento $2l$ sob um carga concentrada Q (Figura 47-a). O critério de resistência adotado é a Equação 3.4. A distribuição elástica dos momentos fletores indica

Figura 47 – a) Diagrama da viga; b) diagrama de momento fletor; c) mecanismo de ruptura



(fonte: elaborado pelo autor)

as seções onde o momento fletor tem picos, e potencialmente ocorrerá a formação de rótulas

plásticas. Com isto, assume-se o mecanismo de ruptura com rótulas plásticas nos pontos O e A Figura 47-b. Uma rótula plástica é uma descontinuidade da rotação $\dot{\theta}$ do eixo da viga, denotada por $\llbracket \dot{\theta} \rrbracket$. A potência máxima resistente é $M_u \llbracket \dot{\theta} \rrbracket$ ou $M'_u \llbracket \dot{\theta} \rrbracket$, de acordo com o sinal da resistência à flexão ativada na rótula. A Equação 3.3, para uma barra e mecanismos definidos somente por rótulas concentradas, se reduz a

$$P_{rm} = \sum \pi(\llbracket \dot{\theta} \rrbracket),$$

onde $\pi(\llbracket \dot{\theta} \rrbracket)$ é igual a $M_u \llbracket \dot{\theta} \rrbracket$ ou $M'_u \llbracket \dot{\theta} \rrbracket$, conforme o sentido de formação da rótula.

Adotando uma convenção de sinal negativo para representar uma rotação no sentido horário em relação ao eixo da estrutura, as descontinuidades são

$$\llbracket \dot{\theta} \rrbracket = 0 - \dot{\theta} = -\dot{\theta} \quad \text{em O},$$

$$\llbracket \dot{\theta} \rrbracket = \dot{\theta} - (-\dot{\theta}) = 2\dot{\theta} \quad \text{em A},$$

portanto a potência dos esforços internos fica $P_{rm} = M'_u \dot{\theta} + M_u 2\dot{\theta}$.

A potência realizada pela carga concentrada (Equação 1.5) é o produto da carga Q com sua taxa de deslocamento associada, i.e. a velocidade v_A

$$P_{ext} = Q v_A = Q \dot{\theta} l,$$

onde $v = \dot{\theta} l$ é a relação entre velocidade angular e a velocidade linear.

Substituindo na equação $P_{ext} = P_{rm}$ resulta o limite superior Q^s para a carga de ruptura Q_u :

$$Q_u \leq Q^s = \frac{M'_u + 2M_u}{l}.$$

Para a solução deste problema, a adoção do critério de resistência da Equação 3.4 implica, a princípio, que qualquer ponto da barra é capaz de desenvolver as resistências M'_u ou M_u . Embora isso seja verdade para uma viga de aço, onde em geral $M_u = M'_u = M_{pl}$, para vigas de concreto a armadura é escalonada para evitar um projeto antieconômico, o que significa que M_u e M'_u variam ao longo do comprimento. A solução cinemática fornece um estado de tensão conhecido somente para as rótulas.

Portanto, caso o problema seja de dimensionamento da viga, torna-se necessário obter um campo de momentos $M(x)$ estaticamente admissível que respeite o critério de resistência para a validade do teorema estático.

Este exemplo é baseado em uma modelagem sobre os esforços internos representados por resultantes de tensões na seção, um modelo unidimensional. A abordagem cinemática do concreto armado exige a definição de um critério de resistência separado para as duas fases, aço e concreto, e para a interface entre aço e concreto também.

Para o cálculo de elementos de concreto armado, métodos cinemáticos são raramente empregados na prática, por fornecerem uma solução cuja segurança é difícil de quantificar. Junto com soluções

estáticas, algumas soluções exatas para problemas diversos são conhecidas, com um critério para o concreto de zero resistência à tração e a resistência à compressão definida com um valor efetivo f_{ce} . Uma exceção onde um método cinemático de fato encontra aplicação prática no concreto armado é o método das charneiras plásticas para o dimensionamento de lajes.

3.2 CÁLCULO DA CAPACIDADE OU RESISTÊNCIA DE LAJES ATRAVÉS DA ABORDAGEM CINEMÁTICA

O método das linhas de ruptura é usado há muito tempo para o cálculo de lajes de concreto armado, e coletâneas de soluções para casos comuns podem ser encontradas na literatura técnica para aplicação prática (JOHANSEN, 1972). O método é aplicável para lajes planas de concreto armado de comportamento dúctil, isto é, lajes cuja taxa de armadura é pequena o suficiente que a ruptura por flexão ocorre com o escoamento das barras. Apesar de ser um método de limite superior, é utilizado para dimensionamento pois as lajes em geral apresentam padrões de ruptura bem previsíveis, e as previsões da teoria aproximam bem os resultados de experimentais.

Assume-se a princípio que a laje é armada uniformemente, o que significa que as taxas de armadura por unidade de comprimento positivas a_{sx} , a_{sy} e negativas a'_{sx} , a'_{sy} são constantes ao longo de toda a laje, podendo ser diferentes entre si. Os momentos fletores últimos correspondentes são m_{xu} , m_{yu} , m'_{xu} , m'_{yu} . Na prática, a armadura negativa pode ser escalonada para evitar um consumo excessivo, porém não é possível deduzir uma distribuição de momentos estaticamente admissível facilmente como no caso 1D para este fim. Orientações quanto à distribuição de armaduras podem ser encontradas em (NIELSEN; HOANG, 2011, p.495).

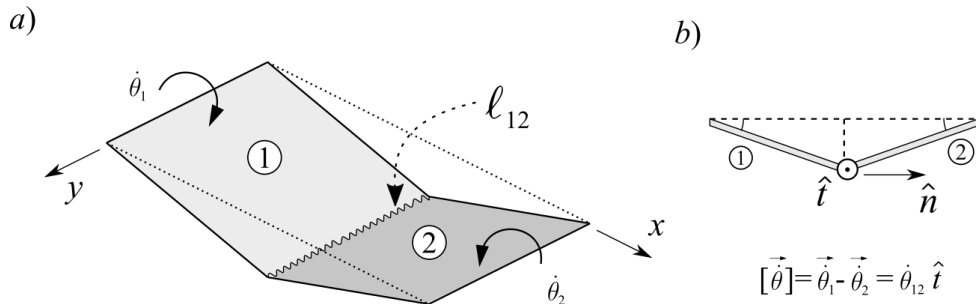
A aplicação da abordagem cinemática consiste em considerar uma família de mecanismos de ruptura definida por parâmetros geométricos. A desigualdade $P_{ext} \leq P_{rm}$ fornece uma expressão para a carga última q_u em função dos momento últimos e dos parâmetros geométricos. A solução deve ser minimizada com respeito a estes parâmetros, o que não garante que a solução minimizada será exata, mas apenas a melhor solução possível a partir da família de mecanismos analisada (NIELSEN; HOANG, 2011).

A partir de observações experimentais, duas classes de mecanismos de ruptura são idealizadas para a análise limite pela abordagem cinemática de lajes de concreto: mecanismo de charneira e mecanismo de cone.

Para vigas, a rótula plástica é uma descontinuidade na rotação que ocorre em um ponto sob o momento último M_u . Analogamente, em lajes uma charneira plástica (a palavra charneira é sinônimo de dobradiça) é uma descontinuidade na rotação que ocorre ao longo de uma linha, definindo um eixo de rotação relativa entre dois blocos da laje (Figura 48-a).

A descontinuidade de rotação é representada com os vetores unitários normal \hat{n} e tangencial \hat{t} ($\hat{n} \times \hat{t} = \hat{e}_z$). A descontinuidade de rotação $[[\theta]]$ na charneira ℓ_{12} é representada por uma grandeza

Figura 48 – a) A charneira ℓ_{12} é o eixo de rotação relativa entre os blocos 1 e 2; b) o vetor de descontinuidade é calculado a partir dos vetores de rotação dos blocos



(fonte: elaborado pelo autor)

vetorial, calculada a partir dos vetores de rotação $\vec{\theta}_1$ e $\vec{\theta}_2$ dos blocos 1 e 2 pela equação na Figura 48-b. A parcela de contribuição para a potência resistente máxima P_{rm} de uma charneira é dada por

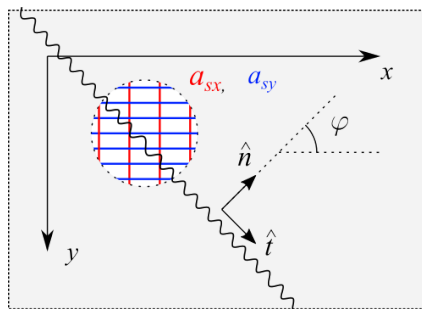
$$(\text{Acréscimo em}) P_{rm} = \int_{\ell_{12}} \pi([\dot{\theta}]) ds = |\ell_{12}| \pi(\dot{\theta}_{12}). \quad (3.5)$$

O momento m_{nu} na charneira de normal \hat{n} (Figura 49) é calculado a partir de m_{xu} e m_{yu} (Figura 49) por uma transformação de coordenadas. Para lajes ortotrópicas ($m_{xu} \neq m_{yu}$), o momento m_{nu} na charneira de normal $\hat{n} = \{\cos\varphi; \sin\varphi\}^T$ e vetor tangente \hat{t} é dado por

$$m_{nu} = m_{xu} \cos^2 \varphi + m_{yu} \sin^2 \varphi. \quad (3.6)$$

Para lajes isotrópicas, o momento na charneira é o mesmo para qualquer direção $m_{nu} = m_{xu} =$

Figura 49 – Para lajes ortotrópicas, m_{nu} depende da orientação da charneira.



(fonte: elaborado pelo autor)

m_{yu} .

A transformação a partir dos momentos principais m_{xu} e m_{yu} , também gera uma componente tangencial m_{ntu} , que não é relevante para o método das charneiras devido ao critério de resistência usualmente adotado para lajes de concreto. O *critério de Johansen* tem como resultado que o limite de resistência é atingido em um ponto quando o momento m_n atinge seu valor máximo positivo m_{nu} ou negativo m'_{nu} , para uma dada direção \hat{t} (SALENÇON, 2013).

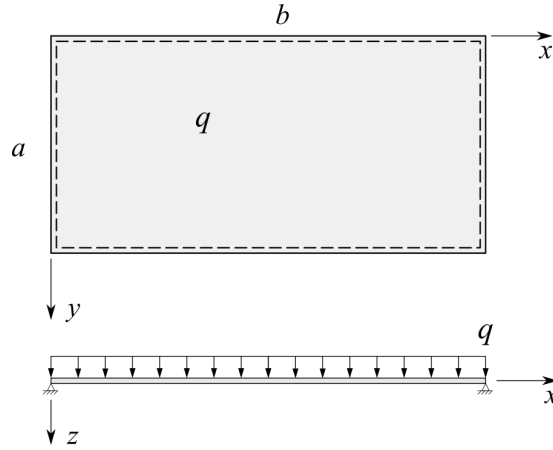
O critério de Johansen é utilizado no cálculo da máxima potência resistente por meio da função de apoio $\pi(\dot{\theta}_{12})$, que depende da orientação da charneira i.e., se esta mobiliza o momento último positivo m_{nu} , ou o negativo m'_{nu} , ou seja

$$\pi(\dot{\theta}_{12}) = \begin{cases} m_{nu}\dot{\theta}_{12}, & \text{se } \llbracket \vec{\theta} \rrbracket \parallel \hat{t} \Leftrightarrow \text{armadura inferior tracionada;} \\ m'_{nu}\dot{\theta}_{12}, & \text{se } \llbracket \vec{\theta} \rrbracket \parallel -\hat{t} \Leftrightarrow \text{armadura superior tracionada.} \end{cases}$$

As magnitudes de rotação relativa $\dot{\theta}_{ij}$ podem ser calculadas a partir da geometria do mecanismo.

O exemplo a seguir ilustra o cálculo da capacidade portante da laje retangular, apoiado nos 4 bordos e sob carregamento constante p , ilustrada na Figura 50.

Figura 50 – Laje retangular simplesmente apoiada de lados a e b sob carregamento uniforme q .



(fonte: elaborado pelo autor)

O mecanismo de ruptura simétrico, definido por 5 charneiras e parametrizado pelo ângulo α , está ilustrado na Figura 51-a

A potência P_{ext} exercida pelo carregamento uniforme q é

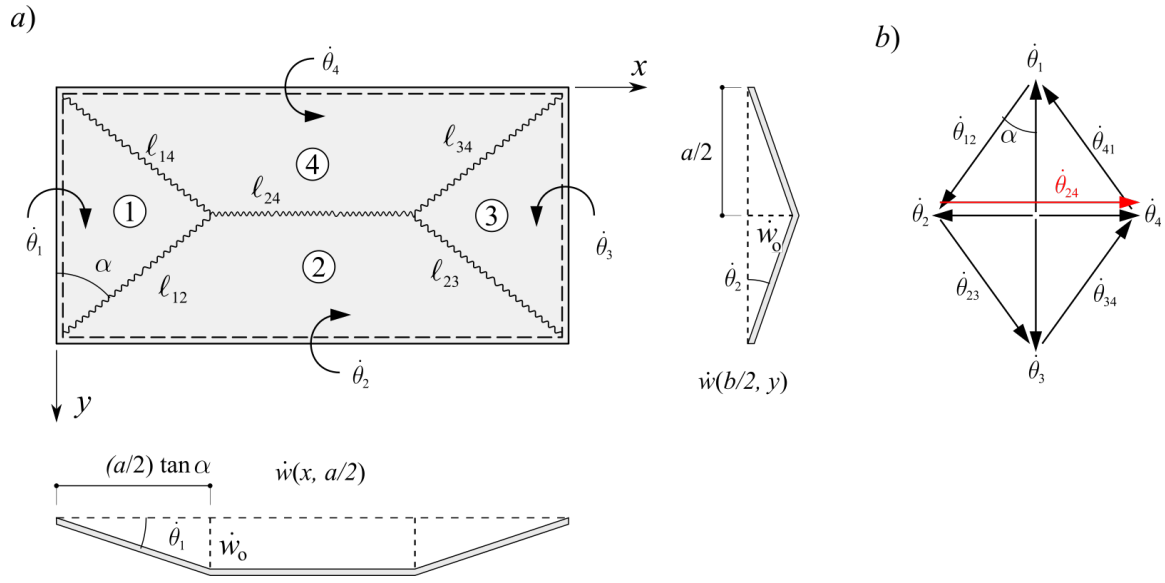
$$P_{ext} = \int_{\text{laje}} p \dot{w} dS = p \int_{\text{laje}} \dot{w} dS.$$

A integral pode ser calculada facilmente como a soma dos volumes definidos pelo campo de deslocamentos \dot{w} , nesse caso pode ser visto como uma pirâmide e um prisma triangular:

$$P_{ext} = q \left(\frac{1}{3} \dot{w}_{max} (a^2 \tan \alpha) + \frac{1}{2} \dot{w}_{max} a (b - a \tan \alpha) \right) = \frac{qa^2}{6} \left(\frac{3b}{a} - \tan \alpha \right)$$

A potência de deformação é soma da parcela de contribuição de cada charneira segundo a Equação 3.5. Pela simetria, a contribuição de 4 das 5 charneiras é igual entre si:

$$4 \int_{\ell_{12}} \pi(\llbracket \dot{\theta} \rrbracket) ds + \int_{\ell_{24}} \pi(\llbracket \dot{\theta} \rrbracket) ds = 4\ell_{12}\pi(\dot{\theta}_{12}) + \ell_{24}\pi(\dot{\theta}_{24}).$$

Figura 51 – Mecanismo de ruptura parametrizado pelo ângulo α .

(fonte: elaborado pelo autor)

Assumindo que a laje é isotrópica, e notando que todas as charneiras são positivas, resulta $\pi(\dot{\theta}_{ij}) = \dot{\theta}_{ij}\ell_{ij}$ para todas as charneiras,

$$P_{rm} = m_u(4\dot{\theta}_{12}\ell_{12} + \dot{\theta}_{24}\ell_{24}).$$

As magnitudes de rotação relativa θ_{ij} podem ser obtidas a partir da geometria do movimento e do diagrama de velocidades ilustrado na Figura 51-b. Da relação entre as velocidades no movimento (Figura 51-a):

$$\ell_{12} = \frac{a}{2 \cos \alpha}, \quad \ell_{24} = b - a \tan \alpha; \quad \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_4 = \frac{2\dot{w}_o}{a}, \quad \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_3 = \frac{2\dot{w}_o}{a \tan \alpha}.$$

A partir do diagrama de velocidades,

$$\dot{\theta}_{12} = \dot{\theta}_{41} = \dot{\theta}_{23} = \dot{\theta}_{34} = \frac{2\dot{w}_o}{a \sin \alpha}, \quad \dot{\theta}_{24} = \frac{4\dot{w}_o}{a}.$$

Substituindo em P_{rm} e simplificando, resulta

$$P_{rm} = 4m_u\dot{w}_o \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{b}{a} \right).$$

Do teorema cinemático, a desigualdade $P_{ext} \leq P_{int}$ dá a seguinte relação entre a carga atuante p e o momento último m_u em função do parâmetro geométrico:

$$p \leq \frac{24m_u}{a^2} \left[\left(\frac{b}{a} + \frac{1}{\tan \alpha} \right) \div \left(\frac{3b}{a} - \tan \alpha \right) \right] = \frac{24m_u}{a^2} f(\alpha)$$

Para encontrar o menor valor da carga p capaz de causar a ruptura da laje, $f(\alpha)$ deve ser minimizada em relação a α . Pode-se mostrar que o resultado obtido para $\alpha = 45^\circ$, caso em

que todos os blocos têm a mesma rotação, desvia no máximo em torno de 2% da solução mais precisa obtida através da minimização:

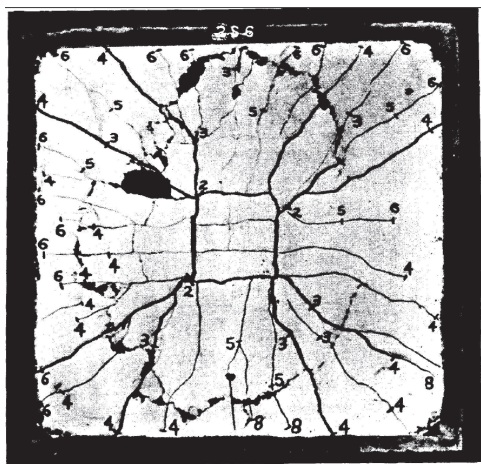
Invertendo para m_u , obtém-se um limite superior para o momento último,

$$m_u \leq m_u^s = \frac{pa^2}{24} \frac{3b - a}{a + b}.$$

Neste caso, o dimensionamento estará sendo realizado de modo que a resistência da laje real pode ser menor do que a previsão do cálculo, ou seja, do ponto de vista teórico não garantia de segurança. Em um projeto real, tanto para o resultado deste exemplo como para outras expressões obtidas da aplicação do método cinemático para lajes, a confiabilidade vem da comparação dos resultados com numerosos experimentos em escala real. Por esta razão o método cinemático aplicado ao dimensionamento de lajes é endossado por diversas normas para o cálculo de lajes de concreto.

Além dos mecanismos de blocos e charneiras, a observação da ruptura de lajes sob carregamentos localizados, como no caso de lajes planas apoiadas em pilares, evidencia um tipo de ruptura por flexão (i.e., que ocorre com o escoamento da armadura longitudinal) caracterizado por fissuras radiais em torno do ponto de aplicação da carga, como ilustrado na Figura 52-a.

Figura 52 – Ruptura por flexão característica da ação de cargas concentradas, com fissuras radiais



(fonte: Braestrup (1979))

Este tipo de ruptura é idealizado pelo mecanismo de cone: um movimento com taxa de curvatura $\dot{\chi}$ distribuída (Figura 52-a) que é aplicável a situações de carga concentrada ou localizada e lajes circulares. A formulação matemática e exemplos de sua aplicação podem ser encontrados em (SALENÇON, 2013), (MARTI et al., 1999).

No caso de cargas concentradas em lajes, o esforço cortante pode induzir uma ruptura por punção, impedindo que a laje desenvolva a resistência à flexão calculada. A punção é um tipo de ruptura que ocorre de maneira frágil, e pode ser controlada através do uso de armadura transversal. Os procedimentos para verificação do risco de punção são encontrados em normas. Uma exposição

do assunto com métodos da análise limite pode ser encontrada em (NIELSEN; HOANG, 2011, cap.7)

4 CONCLUSÕES

Os métodos de cálculo e dimensionamento de estruturas de concreto armado discutidos neste trabalho se mostram extremamente úteis para o tratamento de diversos tipos de elementos e situações de dimensionamento aparentemente não-relacionados e que a princípio poderiam ser consideradas muito complicadas ou difíceis para um estudante ou iniciante no dimensionamento de estruturas de concreto armado.

O estudo dos fundamentos da análise limite traz à tona a inter-relação entre os métodos de cálculo clássicos apresentados e os procedimentos de dimensionamento recomendados em normas. Qualquer problema de resistência no ELU pode ser trazido a primeiros princípios e analisado de maneira racional. O estudo de um problema constrói em cima do domínio de outro de uma classe diferente, e o repertório de cálculo torna-se gradativamente mais sofisticado. Os exemplos apresentados neste trabalho são básicos e ilustram casos simples, mas a generalização para casos mais complexos segue os mesmos princípios.

A aplicação da teoria da análise limite ao concreto armado exige diversas correções e cuidados que são particulares das estruturas de concreto armado, como a ancoragem de barras e o uso de valores efetivos de resistência. No entanto qualquer pessoa que se dedicar ao estudo do concreto armado estará ciente destas particularidades, seja no caso da aplicação de métodos associados à análise limite, ou outros quaisquer.

O estudo quase exclusivo de teorias elásticas em paralelo com uma tendência ao uso de fórmulas prontas pode desestimular a concepção de estruturas inovadoras e contribuir para uma dependência de certos softwares observada nas novas gerações. Softwares que se mal utilizados geram projetos automáticos com consumos exagerados de armaduras e concreto mas não necessariamente com um aumento correspondente de segurança. Além disso a norma brasileira de dimensionamento de estruturas de concreto armado é fortemente influenciada pela análise limite, o que sugere que um tratamento sobre concreto armado orientado à análise limite e seus métodos pode contribuir para tornar o estudo e o ensino do comportamento do concreto armado mais interessantes.

A análise limite e os métodos associados não fornecem, é claro, a solução para todos os problemas do dimensionamento de estruturas e elementos de concreto armado, mas têm um papel extremamente importante, pela sua relação inerente com as questões sobre redistribuições de esforços e ductilidade que são necessárias para o projeto orientado à robustez estrutural, e pelo papel central da resistência dos materiais constituintes.

REFERÊNCIAS

ACI COMMITTEE 445. *445R-99: Recent Approaches to Shear Design of Structural Concrete (Reapproved 2015)*. Farmington Hills, 2002.

ACI Committee 447. *447R-18: Design Guide for Twisting Moments in Slabs*. Farmington Hills, 2018.

ÅKESSON, B. *Understanding bridge collapses*. London: Taylor & Francis, 2008. ISBN 978-0-415-43623-6.

American Concrete Institute. *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-19) ; an ACI standard ; Commentary on Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318R-19)*. Farmington Hills: American Concrete Institute, 2019. ACI 318-19. (ACI Standard, ACI 318-19).

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento*. Rio de Janeiro, 2014.

BRAESTRUP, M. Punching shear in concrete slabs. *Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen = IABSE reports of the working commissions*, 964112-9, 0074-1442, 28, 1979, 115, IABSE, 1979.

CARNEIRO, F. L. L. Cálculo das estruturas hiperestáticas de concreto armado na fase plástica. *Estrutura : revista técnica das construções, engenharia e arquitetura*. hi, v. 31, 1960.

CHEN, W.-F. *Limit Analysis and Soil Plasticity*. [S.l.]: Elsevier, 1975. 638 p. ISBN 0-444-41249-2.

CHEN, W. F. H. *Plasticity for Structural Engineers*. [S.l.]: Springer New York, 1988. ISBN 1-4612-8380-9.

CHOUDHURY, J.; HASNAT, A. Bridge collapses around the world: Causes and mechanisms. In: . [S.l.: s.n.], 2015.

European Committee for Standardization. EN 1992-1-1 Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings. In: . Brussels: CEN, 2005.

fib. *Design examples for strut-and-tie-models*. Lausanne: Fédération Internationale du Béton fib / International Federation for Structural Concrete, 2011. v. 61. (fib bulletin technical report, v. 61). ISBN 978-2-88394-101-4.

HEYMAN, J. The stone skeleton. *International Journal of Solids and Structures*, Pergamon, v. 2, n. 2, p. 249–279, 4 1966. ISSN 0020-7683. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768366900187?via%3Dihub>>.

HEYMAN, J. *Structural analysis : a historical approach*. Cambridge [etc.]: Cambridge University Press, 1998. ISBN 0-521-62249-2.

HEYMAN, J. Navier's Straitjacket. *Architectural Science Review*, Taylor & Francis, v. 42, n. 2, p. 91–95, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00038628.1999.9696858>>.

HILLERBORG, A. *Strip method of design*. Slough: Cement and Concrete Association, 1975. ISBN 0-7210-1012-1.

HUBER, H. Die abgesenkte Reussbrücke Wassen: Einsturzgefahr, dramatischer Wettlauf mit der Zeit, den Einsturz zu verhindern, Sicherungsnotmassnahmen. *Schweizer Ingenieur und Architekt*, 162359-x, 1420-3367, 107, 1989, 25, 673, Verlags-AG der akademischen technischen Vereine, 1989.

J HEYMAN. HAMBLY'S PARADOX: WHY DESIGN CALCULATIONS DO NOT REFLECT REAL BEHAVIOUR. *Proceedings of the ICE - Civil Engineering*, Ice Virtual Library, v. 114, n. 4, p. 161–166, 1996.

JOHANSEN, K. *Yield-line formulae for slabs*. London: Cement and Concrete Association, 1972. ISBN 0-7210-0819-4.

KAUFMANN, W. *Strength and Deformations of Structural Concrete Subjected to In-Plane Shear and Normal Forces*. Basel: Birkhäuser Basel, 1998. v. 234. (Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich ;, v. 234). ISBN 9783034876124.

KAUFMANN, W.; MEIER, B. Conceptual Bridge Design beyond Signature Structures. *IABSE Symposium Report*, v. 105, p. 1–8, 2015.

KAZINCZKY, G. v. Critical observations on the theory of plasticity. *IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht*, IABSE, v. 2, 1936.

KNOLL, F. et al. *Design for Robustness*. International Association for Bridge and Structural Engineering, 2009. (Structural engineering documents). ISBN 9783857481208. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=5gJHa8m4fG4C>>.

KUPFER, H. Extension de l'analogie du treillis de MÖRSCH au moyen du principe de travail minimal de déformation. In: Comité Européen du Béton (Ed.). *Effort tranchant équilibre interne après fissuration (symposium de Wiesbaden) - Volume 40 de CEB Bulletin*. [S.l.: s.n.], 1964. p. 58–72.

KURRER, K.-E. *The History of the Theory of Structures : From Arch Analysis to Computational Mechanics*. Weinheim: Wiley-VCH, 2008. ISBN 3-433-01838-3.

LARSEN, K. P. *Numerical Limit Analysis of Reinforced Concrete Structures: Computational Modeling with Finite Elements for Lower Bound Limit Analysis of Reinforced Concrete Structures*. Tese (Doutorado), 1 2011.

LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. *Construções de concreto, volume 1: princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto armado*. 1. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1977. 336 p. ISBN 9788571932050.

MARTI, P. Basic Tools of Reinforced Concrete Beam Design. *ACI Journal Proceedings*, v. 82, n. 1, p. 46–56, 1985.

MARTI, P. *Theory of structures : fundamentals, framed structures, plates and shells*. Berlin: Ernst & Sohn, 2013. ISBN 978-3-433-02991-6.

MARTI, P. et al. *Tragverhalten von Stahlbeton: Fortbildungskurs für Bauingenieure, ETH Zürich, 30.9./1.10.1999*. [S.l.]: Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich-Hönggerberg; Zürich, 1999. (Tragverhalten von Stahlbeton).

MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. *Matrix structural analysis*. 2nd ed.. ed. New York, NY: John Wiley, 2000. ISBN 0-471-37651-5.

MENN, C. *Prestressed Concrete Bridges*. [S.l.]: Birkhäuser Basel, 1990. ISBN 3-0348-9920-3.

MENN, C. Reussbrücke Wassen - Schadenanalyse und Rekonstruktionskonzept. *Schweizer Ingenieur und Architekt*, 162359-x, 1420-3367, 107, 1989, 25, 678, Verlags-AG der akademischen technischen Vereine, 1989.

MÖRSCH, E. *Concrete-steel construction*. New York: Engineering News Publishing Co, 1910.

MUTTONI, A.; SCHWARTZ, J.; THÜRLIMANN, B. *Design of Concrete Structures with Stress Fields*. Basel: Birkhäuser Basel, 1997. ISBN 3-0348-9885-1.

NIELSEN, M. P.; HOANG, L. *Limit analysis and concrete plasticity*. 3rd ed.. ed. Boca Raton: Taylor & Francis, 2011. ISBN 978-1-4398-0396-7.

NIKETIĆ, F. *Development of a consistent approach for design and assessment of structural concrete members using stress fields and strut-and-tie models*. Tese (Doutorado), Lausanne, 2017.

PRAGER, W. *An introduction to plasticity*. London: Addison-Wesley, 1959. (Addison-Wesley series in the engineering sciences).

REINECK, K.-H. et al. Gaining experience with strut-and-tie models for the design of concrete structures. In: *Design examples for strut-and-tie models*. Lausanne: Fédération Internationale du Béton (fib), 2011.

RITTER, W. Die Bauweise Hennebique. *Schweizerische Bauzeitung*, A. Waldner, v. 33/34, n. 7, 1899. Disponível em: <<http://doi.org/10.5169/seals-21311>>.

RÜSCH, H. Über eine Erweiterung der Mörschen Fachwerkanalogie. *IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht*, 581337-2, 7, 1964, 353, IABSE, 1965.

SALENÇON, J. *Yield Design*. [S.l.: s.n.], 2013. ISBN 9781848215405.

SCHLAICH, J. The need for consistent and translucent models. *IABSE reports = Rapports AIPC = IVBH Berichte*, IABSE, v. 62, 1991.

SCHLAICH, J.; SCHAFER, K.; JENNEWEIN, M. Toward a Consistent Design of Structural Concrete. *PCI Journal*, v. 32, n. 3, p. 74–150, 1987. ISSN 08879672. Disponível em: <http://www.pci.org/pci_journal-1987-may-june-5/>.

Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein. *Construction en béton = Betonbau = Strutture in calcestruzzo = Concrete structures*. Zurich: SIA, 2003. v. 262:2003. (Norme / SIA Bâtiment, génie civil, v. 262:2003).

THÜRLIMANN, B. *Grundsätzliches zu den plastischen Berechnungsverfahren*. Zürich: Institut für Baustatik ETH Zürich, 1961. Nr. 1. (Bericht / Institut für Baustatik ETH Zürich, Nr. 1).

TIMOSHENKO, S. *History of Strength of Materials: With a Brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures*. Dover Publications, 1983. (Dover Civil and Mechanical Engineering Series). ISBN 9780486611877. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=tkScQmyhsb8C>>.

VINCENT, H. *Développement d'un modèle de calcul de la capacité ultime d'éléments de structure (3D) en béton armé, basé sur la théorie du calcul à la rupture*. Tese (Doutorado), 1 2018.

WALTHER, R. Ergebnisse von Forschungsarbeiten an wandartigen Trägern aus Stahlbeton. *Schweizerische Bauzeitung*, Verlags-AG der akademischen technischen Vereine, v. 85, n. 13, p. 223, 1967.

WIGHT, J. K.; MACGREGOR, J. G. *Reinforced concrete : mechanics and design*. Boston: Pearson, 2012. ISBN 978-0-13-217652-1.